IOF221 - Oceanografia Dinâmica I

# Prova II 2018

Nome:____________________________

Informações:

- Duração de 2:00 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra anulará teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Assinale apenas as afirmações erradas e mostre porque estão erradas.

   (a) Considere uma gota de óleo esférica submersa e em repouso, com raio $r = 1 \times 10^{-6}$ m e centro à profundidade $h$ num tanque com um líquido polar de densidade $\rho$ igual à do óleo. Na notação usual, o empuxo $\vec{f}$ no centro de massa da gota é $\vec{f} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\, \hat{k}$. [5]

   **A. Errado** B. Certo

   **Resposta:**
   Errado, falta a gravidade, o certo seria $\vec{f} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \hat{k}$.

   (b) Num vórtice de Rankine onde o raio $R$ marca a mudança de regime, a circulação para qualquer $r \leq R$ é $2\pi\Omega\, r^2$, onde $\Omega$ é a velocidade angular. [5]

   **A. Certo** B. Errado

   **Resposta:**
   Certo. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. A parte em rotação de corpo sólido tem $u_\theta = \Omega r$. Num círculo $dl = r\, d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \Omega r.r d\theta = \oint_0^{2\pi} \Omega r^2 d\theta = 2\pi\Omega\, r^2$.

   (c) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ exclui o termo $\vec{\nabla} \times \vec{u}$. [5]

   A. Errado **B. Certo**

   **Resposta:**
   Certo. Não há como obter a subtração dos termos cruzados à partir da expressão de $e_{ij}$

   (d) As linhas de corrente de um fluxo bidimensional incompressível são definidas como: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, ou seja, $v\, dx = u\, dy$ [5]

   **A. Certo** B. Errado

   **Resposta:**

2. Considere que ao redor da estrela Pollux orbita o exoplaneta habitável Thestias que possui um oceano que cobre 40% da superfície. Um ano de Thestias tem 400 dias terrestres e ele possui um lado permanentemente escuro. Adote sistemas de referência não-inerciais, geocêntrico. Considere que duas partículas de mesma densidade, em 30°S, 40°W estão se movendo a 1 m/s para sul, mas uma está em Thestias e outra na Terra. **Seria correto afirmar** que a partícula em Thestias está sujeita a uma força de Coriolis $\sim 400\times$ menor que a partícula na Terra? [10]

   **Dica:** Não confunda o parâmetro de Coriolis $f = 2\Omega \sin(\theta)$, com a força de Coriolis $F_c$ que está na questão 6, equação (1). Dê uma resposta quantitativa e organizada.

**Resposta:**

Sim, seria. Nos dois casos, a força de Coriolis é $\vec{F_c} = 2\rho\Omega\sin(\theta)\, v_{\hat{i}}$, diretamente proporcional a $\Omega$. Na Terra $\Omega = \rho\frac{2\pi}{1\text{dia}}$ e em Thestias $\Omega = \rho\frac{2\pi}{400\text{dias}}$; cuja razão é 400.

3. **Demonstre** que $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ e $\epsilon_{ijk}(\frac{\partial u_k}{\partial x_j})_{\hat{x_i}}$ são iguais. 10

**Dica:** Abra o rotacional e passe para notação indicial, incluindo os versores.

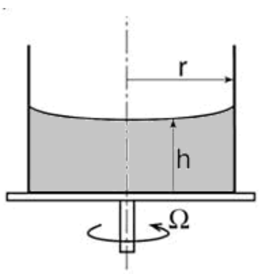
**Resposta:**

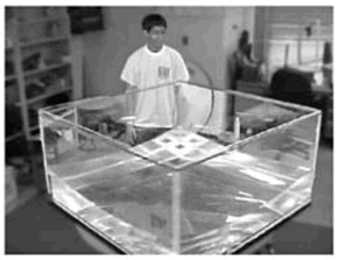
$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{\hat{x}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\hat{y}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\hat{z}} \\ &= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)_{\hat{x_1}} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)_{\hat{x_2}} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)_{\hat{x_3}}\end{aligned}$$

onde eliminados os parênteses, cada derivada parcial é da forma $\omega_i = \pm(\frac{\partial u_k}{\partial x_j})_{\hat{x_i}}$ em notação tensorial. Os índices não se repetem e esse $\pm$ é positivo para o 1º, 3º e 5º termos onde $ijk$ é cíclico, e negativo para o 2º, 4º e 6º termos onde $ijk$ é anticíclico. Usando a definição do tensor alternante $\epsilon$:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312,\ \text{(cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132\ \text{(anticíclico).} \end{cases} \qquad \text{portanto } \vec{\omega} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

4. Considere um tanque centrado sobre uma mesa girante (como um toca-discos gigante). Colocamos fluido até que a altura da superfície $h$ chegue a um palmo e dois dedos e colocamos a mesa para girar a uns 10 rpm. Depois de 25 min o fluido está em rotação de corpo sólido. A partir desse momento temos um equilíbrio entre o gradiente horizontal de pressão hidrostática e a força centrífuga. **Prove** teoricamente que a superfície $h(r)$ é a mesma para água, álcool e glucose de milho. 10



**Dicas:** Adote um sistema de coordenadas cilíndrico. Escreva apenas o balanço entre o gradiente de pressão radial e a força centrífuga. Integre dos dois lados para obter $h(r)$. Deixe a constante $h_0$ indicada.

**Resposta:**

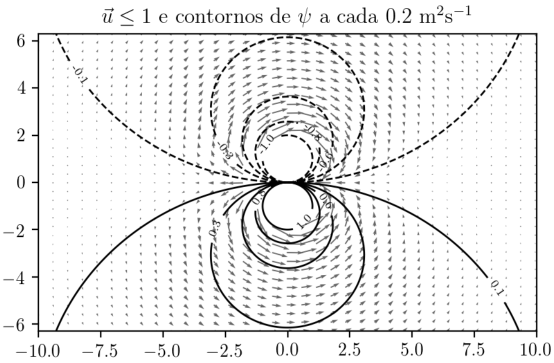
$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \Omega^2 r \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \Omega^2 r \quad \text{. Por hidrostática } p = \rho g h\text{, então} \quad g\frac{\partial h(r)}{\partial r} = \Omega^2 r.$$

$$\text{Integrando em } r \quad g\int \frac{\partial h(r)}{\partial r}dr = \Omega^2 \int r dr \quad h(r) = \frac{\Omega^2}{2g}r^2 + h_0.$$

Como $h$ não depende de $\rho$ e nem de $\mu$, não importa que fluido Newtoniano mais denso que o ar se use.

5. Dinâmica de fluidos guarda certas similaridades com eletrodinâmica clássica: certos fluxos se assemelham ao potencial eletrostático, onde cargas $\oplus$ e $\ominus$ imitam fontes e sorvedouros. Um exemplo disso é o fluxo ilustrado ao lado, dado por: **10**

$$\psi = -K\frac{\sin(\arctan\frac{y}{x})}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$




Por isso, fluxos bidimensionais, incompressívis e irrotacionais são chamados de *fluxos potenciais*. **Demonstre matematicamente** que neste caso temos um fluxo potencial.

**Dica:** Em coordenadas cilíndricas este problema é bem mais simples que em Cartesianas.

**Resposta:**

Convertendo $\psi$ para um sistema de coordenadas cilíndrico (obviamente 2D): $\psi = -K\frac{\sin\theta}{r}$.

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{K}{r^2}\cos\theta \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{K}{r^2}\sin\theta.$$

Se for incompressível, $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$, fazendo as derivadas e somando:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = -\frac{K\cos\theta}{r}\frac{\partial(r^{-1})}{\partial r} - \frac{K}{r^3}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{K\cos\theta}{r^3} - \frac{K\cos\theta}{r^3} = 0$$

Se for irrotacional, $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$, fazendo as derivadas e somando:

$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} = -\frac{K\sin\theta}{r}\frac{\partial(r^{-1})}{\partial r} + \frac{K}{r^3}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta} = \frac{K\sin\theta}{r^3} - \frac{K\sin\theta}{r^3} = 0$$

6. Esta é a **eq. de Navier–Stokes**: $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (1)$$

(a) Um vórtice de Rankine foi detectado sobre 30°S 40°W girando em torno de si com velocidade tangencial máxima de 50 cm/s, onde ele tem 280 km de diâmetro e vorticidade $\oplus$. Considere o fluxo estacionário, linear, invíscido e hidrostático. Assuma que a camada de cima é homogênea e que a camada de baixo é infinitamente profunda. Simplifique e **justifique** cada simplificação. **Calcule** o desnível radial entre o centro e o raio de velocidade máxima, usando a equação 1. **Responda** se essa parte do vórtice é um morro ou um vale. **15**

**Dicas:** Nas direções zonal, meridional e vertical, as equações tem 2 termos. Nem precisa converter para coordenadas cilíndricas. Substitua valores só no último passo.

**Resposta:**

Fluxo estacionário e linear elimina os dois termos da derivada total, 1º termo. Fluxo invíscido elimina o termo viscoso, que é o 3º. Fluxo hidrostático simplifica o balanço vertical para $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$ onde g é a gravidade aparente. Se a camada de cima é homogênea e a de baixo infinita, as velocidades são zero na camada de baixo e são 2D na de cima. Sobra o balanço entre as forças de Coriolis e do gradiente de pressão (na horizontal) e a hidrostática (na vertical); o apelido disso é geostrofia. Como o vórtice de Rankine é circular, simétrico em $\theta$, basta resolver num raio. Escolho a direção zonal. O balanço é

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2\rho\Omega\sin\theta u, \text{ aproximando para diferenças finitas, } \frac{\Delta p}{\Delta y} = 2\rho\Omega\sin\theta u$$

Usando hidrostática para converter a pressão em altura, transformo $\vec{g}$ em gravidade aparente:

$$\rho g \Delta h = 2\rho\Omega\sin\theta\, u\, \Delta y, \quad \Delta h = \frac{2\Omega\sin\theta\, u\, \Delta y}{g}$$

Fazendo as contas,

$$\Delta h = \frac{2\times 7.3\times 10^{-5}\times -0.5\times 0.5\times 1.40\times 10^{5}}{9.81} = -0.5\text{m}$$

Portanto do raio para fora a altura diminui, é um morro.

(b) Dado um fluxo oceânico estacionário, linear e forçado pelo vento, suponha também que a interface oceano-atmosfera é perfeitamente horizontal e que o fluxo é homogêneo e hidrostático. **Escreva** as equações (componentes) do balanço horizontal de momentum. $\boxed{10}$

**Dica:** Ao abrir em componentes, considere apenas os 2 maiores termos do Laplaciano: as derivadas segundas das velocidades horizontais na direção vertical.

**Resposta:**
Aplicando as simplificações temos: $0 = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$. Com aquelas 3 condições o balanço hidrostático $\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$ é a componente vertical que não interessa aqui.

Na horizontal sobrou $\mu\nabla^2\vec{u} = 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$, simplificando o Laplaciano do termo viscoso e abrindo o produto vetorial do termo de Coriolis:

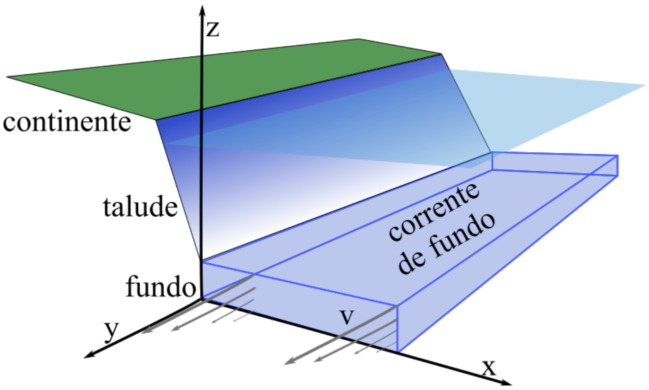
$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\rho\Omega\sin\theta\, v \quad \text{em } \hat{i_x}$$
$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\rho\Omega\sin\theta\, u \quad \text{em } \hat{i_y}$$

(c) Substitua as tensões horizontais de cisalhamento ($\tau_x$, $\tau_y$) nos termos que vieram do Laplaciano. $\boxed{5}$

**Resposta:**
Bem vindo à dinâmica de Ekman.

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\rho\Omega\sin\theta\, v \qquad \frac{\partial\tau_x}{\partial z} = -2\Omega\sin\theta\, v$$
$$\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\rho\Omega\sin\theta\, u \qquad \frac{\partial\tau_y}{\partial z} = 2\Omega\sin\theta\, u$$

7. Considere a média temporal da corrente profunda na borda oeste a 23.5°S de forma bem simplificada.




Suponha que a corrente é paralela à costa, que por sua vez está alinhada com o meridiano de 55°W. Ela está limitada a uma camada homogênea, de altura $h$, largura $l$, sendo sua velocidade $v(h) = v_0$ e $v(0) = 0$. Suponha que a viscosidade turbulenta $A_z$ funciona de forma análoga à viscosidade laminar, ou seja, $\tau_i = A_z \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Essa é uma corrente de mesoescala, portanto a rotação da Terra deve ser levada em conta. Use a gravidade efetiva.

(a) Use o balanço horizontal de momentum **e calcule** o fluxo zonal de volume $U$, integrado de 0 a $h$, em termos de $\tau_i$. $\boxed{20}$

**Dica:** Esse fluxo integrado é em m$^2$s$^{-1}$, volume por unidade de comprimento meridional.

**Resposta:**
Partindo da equação 1, os passos são os mesmos do exercício anterior até chegarmos em

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\rho\Omega \sin\theta\, u, \text{ ou melhor, } A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 2\rho\Omega \sin\theta\, u, \text{ substituindo } \tau_y \text{ temos}$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 2\rho\Omega \sin\theta\, u. \text{ Precisamos integrar em } z\text{, do fundo até o topo da camada:}$$

$$\int_0^h \frac{\partial \tau_y}{\partial z} dz = \int_0^h 2\rho\Omega \sin\theta\, u dz$$

$$\tau_y = 2\rho\Omega \sin\theta\, U \text{ portanto } U = \frac{\tau_y}{2\rho\Omega \sin\theta}$$

(b) Esse transporte é em direção ao talude ou em direção ao oceano aberto? Justifique. $\boxed{5}$

**Resposta:**
$\tau_i = A_z \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, mais especificamente, $\tau_y = A_z \frac{\partial v}{\partial z} \simeq A_z \frac{\Delta v}{\Delta z}$. Note que $v$ aumenta quando $z$ aumenta, portanto $\tau_y > 0$. Estamos considerando $\theta = -23.5°$, Trópico de Capricórnio, portanto o seno é negativo, o que faz $U$ ser negativo, para oeste.

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pontos | 20 | 10 | 10 | 10 | 10 | 30 | 25 | 115 |
| Nota | | | | | | | | |

♠

**Memória não–volátil:**

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

O tensor alternante $\epsilon_{ijk}$ é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312,\ \text{(cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132 \text{ anticíclico).} \end{cases}$$

Conversão do sistema retangular $(x, y, z)$ para o cilíndrico $(r, \theta, z)$ e vice-versa:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta)$, $i_y = (i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$, $i_z = i_z$

Potencial de velocidade e função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$\Omega = 7.29 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$

**Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\vec{\nabla}E =$ | $\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$ | $+$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$ | $+$ | $\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$ |
| $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_r)}{\partial r}$ | $+$ | $\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$ | $+$ | $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ |
| $\vec{\nabla}\times\vec{V} =$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$ | $+$ | $\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$ | $+$ | $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_z}$ |