IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta no caso das erradas.

(a) Considere um vórtice circular de raio R em rotação de corpo sólido. Nele, a circulação calculada num círculo concêntrico de raio r tem valor máximo $2\pi R\omega$, onde ω é a velocidade angular. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

Resposta:
Errado. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. No caso acima $u_\theta = \omega r$ e num círculo $dl = r\,d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \omega r^2 d\theta = 2\pi r^2\omega$, máxima para $r = R$, faltou um r.

(b) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, inclui o termo $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

Resposta:
Sim, para o caso $i = j$.

(c) Considere uma bolha esférica, feita de tinta com densidade ρ e raios $r_1 = 0.2$mm e $r_2 = 0.2004$. Ela está flutuando em repouso no meio do caminho entre a latinha de spray e a parede, portanto imersa em ar. A pressão no centro dela é dada exatamente por $p = p_{atm} + 2\frac{\rho}{r}$ onde r é o raio da bolha. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

Resposta:
Duplamente errado, não é função da densidade ρ mas da tensão superficial σ e como são 2 interfaces, na fórmula deveria ter um 4 no lugar de 2.

(d) A força de Coriolis não acrescenta ou retira energia do sistema pois é sempre perpendicular ao deslocamento. **A. Certo** B. Errado $\boxed{4}$

Resposta:
Correto; *ergo* não realiza trabalho.

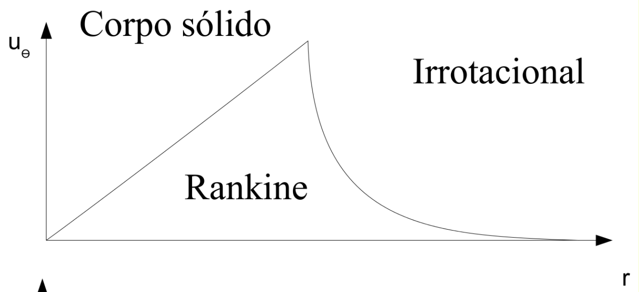
(e) Para que a equação de Bernoulli na forma $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = B$. seja aplicável, basta que o fluxo seja estacionário, irrotacional e incompressível. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

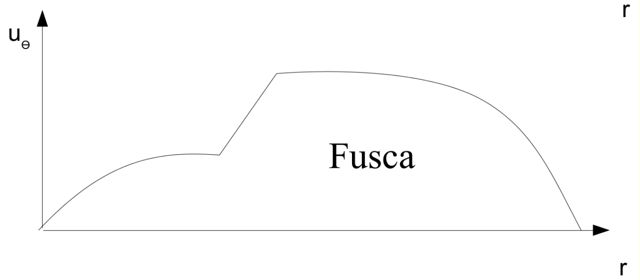
Resposta:
Certo.

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): $\boxed{10}$

$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**	$\nabla(\nabla \cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	√ **NDA**
$\nabla \times (\nabla f)$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	○ Vetor	√ **Escalar**	○ NDA
$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	√ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA

3. Considere um vórtice 2D estacionário com simetria circular. Já fizemos isso antes para os casos de corpo sólido, irrotacional e Rankine, cujos perfis radiais de velocidade tangencial estão na figura a seguir.
   (a) Demonstre que um vórtice semelhante aos casos anteriores, mas com esse simpático perfil de Fusca, está associado a um campo não divergente de velocidades. $\boxed{5}$
   (b) Mostre que contornos da função de corrente ψ formam círculos. $\boxed{5}$
   (c) Dê a fórmula de ψ deixando indicado $F(r, \theta)$ como a "função-Fusca". $\boxed{5}$





Resposta:
Por semelhança aos casos anteriores, (2D, simetria circular, estacionário) $u_r = 0$ e $u_\theta = F(r)$. Olhe lá no final: $\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_r)}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$; os dois termos se anulam, pois $u_r = 0$ e $u_\theta = u_\theta(r)$ somente, portanto o fluxo é não-divergente.

Da definição $u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, se u_r é zero, então ψ é constante em θ, portanto seus contornos formam círculos concêntricos.

Ainda da definição acima, $\psi = -\int u_\theta dr = -\int F(r)dr$.

Resposta:

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual aplicável aos oceanos da Terra (♁):

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu_{H_2O}\nabla^2\vec{u} + \rho_{H_2O}\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}_{♁} \times (\vec{\Omega}_{♁} \times \vec{r})) - 2\rho_{H_2O}\vec{\Omega}_{♁} \times \vec{u}. \quad (1)$$

Ela vale em qualquer oceano, inclusive no de Kepler-69c (♓), cujo raio é $R_{♓} = 1.4R_{♁}$ e cuja aceleração da gravidade é $g_{♓} = 1.2g_{♁}$. O dia desse exoplaneta é tal que $d_{♓} = 0.125d_{♁}$ e a temperatura média na superfície é de $-163°$C. O oceano é feito de CH_4 líquido, cuja densidade é $\rho_{CH_4} = 0.45\rho_{H_2O}$ e cuja viscosidade é $\mu_{CH_4}0.18 \times 10^{-3}$ Pa.s, 12% a da água.
   (a) Considere no oceano que lá existe a *Corrente de Clarke*, de 1m/s indo de norte para sul, a 30°S. Compare o termo de Coriolis da equação 1 em Kepler-69c com o de uma corrente equivalente aqui na Terra. É maior, menor ou igual? $\boxed{5}$

Resposta:

O que se procura é: $\dfrac{-\,2\rho_{CH_4}\vec{\Omega}_{♅}\times\vec{u}}{-\,2\rho_{H_2O}\vec{\Omega}_{♁}\times\vec{u}}$, substituindo-se as proporções e simplificando

$$\frac{-\,2\rho_{CH_4}\Omega_{♅}\,u\,\sin(30°)}{-\,2\rho_{H_2O}\Omega_{♁}\,u\,\sin(30°)} = \frac{0.45\rho_{H_2O}\,8\Omega_{♁}}{\rho_{H_2O}\Omega_{♁}} = 3.6$$

portanto o termo de Coriolis lá é 3.6 vezes maior que o daqui pois o dia mais curto compensa muito a baixa densidade do metano.

(b) A equação 1 tem 6 termos. Quais componentes de quais termos contém o balanço hidrostático? $\boxed{5}$

Resposta:

A componente vertical do segundo (gradiente de pressão), quarto (peso) e quinto (centrífuga) termos.

(c) O nosso veículo não-tripulado vai mergulhar na *Fossa de Verne*, a 0°N 32°E em Kepler-69c, cuja profundidade é de 1 km. Ele compensa a pressão externa gerando uma pressão interna que você deve estimar para que ele não imploda ou exploda. A resistência à diferença de pressão do casco é de 1×10^6Pa, portanto o teu erro deve ser menor que esse valor. Ignore a pressão atmosférica. Responda com o valor da pressão externa em Pa. $\boxed{5}$

Resposta:

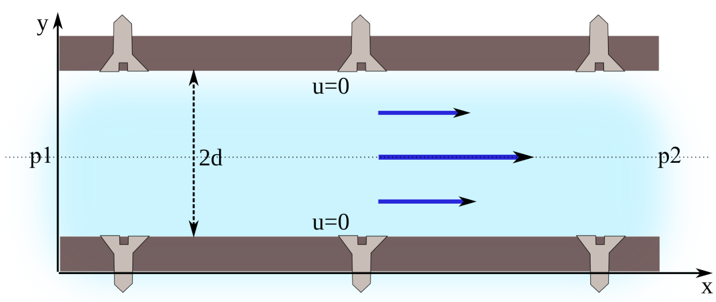
$p = \rho_{CH_4} g_{♅} z \;=\; (0.45\cdot1000)\,(1.2\cdot9.81)\cdot1000 = 5.297\times10^6$ Pa, mas no equador devemos descontar a força centrífuga, $\Omega^2\,R_{♅} \;=\; (8\cdot2\cdot\pi/86400)^2(1.4\cdot6350000) \;=\; 3.00\text{m/s}^2$. Uau! Faz diferença! $p = \rho_{CH_4} g_{♅} z \;=\; (0.45\cdot1000)\,(1.2\cdot9.81-3)\cdot1000 = 3.9474\times10^6$ Pa,

5. Suponha que temos um tanque cilíndrico grandão e nele fazemos um furinho em baixo no centro. Surge em minutos um vórtice aproximadamente irrotacional e estável cujo olho tem perfil vertical hiperbólico e tem um raio pequeno. Que termo da equação de Navier–Stokes gera o gradiente de pressão balanceado pela aceleração centrípeta? $\boxed{5}$

Resposta:

O termo gravitacional (o 4º do problema anterior).

6. Duas placas são vistas de lado na figura abaixo. As duas são fixas e um fluido passa entre elas.



O fluxo é estacionário e laminar. O fluido é Newtoniano, com densidade ρ e viscosidade μ constantes. As componentes da velocidade nas direções y e z são zero. Como as placas são longas, assuma que $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. A gravidade é $g_y = -g$, constante e vertical. A velocidade é zero em $y = \pm d$, i.e. condição de contorno de não escorregamento. O fluxo é forçado pela diferença de pressão $(p2 - p1)$ aplicada nas bordas distantes como indicado. Esse é o famoso fluxo de Poiseuille (com biquinho).

(a) Simplifique a equação da continuidade. $\boxed{5}$

Resposta:
$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i) = 0$, ρ é constante, o fluxo é estacionário e 1D, só sobra $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

(b) Escreva as 3 componentes da equação de Navier-Stokes. É a do problema 4 sem os dois últimos termos pois estamos num referencial inercial. O balanço numa direção é entre viscosidade e gradiente de pressão, noutra é entre gravidade e pressão hidrostática e na terceira... é bem sem graça. 10

Resposta:
Bem, dadas simplificações propostas no enunciado, sobra só isso:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

(c) Neste item obtenha a equação da pressão. Vamos com calma. Integre a equação da variação da pressão em y chamando a constante de integração de $f(x)$ (pois ela só é constante em y). Para determinar a pressão $p(x)$, assuma que a pressão $p(x)$ decai linearmente entre $p(0) = p1$ e $p(L) = p2$ sobre a linha pontilhada $y = 0$ usando as condições de contorno em 0 eL. Para completar $p(x, y)$, a parte em y é a boa e velha hidrostática. A resposta deste item é uma expressão para $p(x, y)$ em função de p_1, p_2, L, ρ e g. 10

Resposta:
Integrando a equação em y temos $p = -\rho g \int dy + f(x) = -\rho g y + f(x)$.
Se $p = a + bx$ nos resta determinar a e b. Em $x = 0$, $p = p_1$, portanto $a = p_1$ em $x = L$, $p = p_2$, portanto $a + bL = p_2$ $p_1 + bL = p_2$ $b = \frac{p_1 - p_2}{L}$.

$$p(x, y) = p_1 - \left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) x - (\rho g) y$$

(d) Para terminar com chave de ouro, vamos obter o perfil de velocidades. Comece com a tua componente x da equação de Navier-Stokes. É uma equação diferencial ordinária de 2ª ordem. Pegue a tua fórmula da pressão e obtenha o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$. Depois integre duas vezes em y, o que gerará duas constantes de integração,c_1 e c_2. Use as condições de contorno $u = 0$ em $y = \pm d$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ em $y = 0$ para obter c_1 e c_2. A tua resposta deve ser uma expressão para $u(y)$ em função de μ, d, L, p_1 e p_2. 10

Resposta:
Partindo daqui, $\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial p}{\partial x}$ podemos substituir o gradiente de pressão obtido ali em cima: $\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right)$. Devemos integrar esta expressão 2 vezes em y:

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) y^2 + c_1 y + c_2.$$ Usando as condições de contorno,

$\dfrac{du(0)}{dy} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ e $u(d) = 0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{d^2}{2\mu}\left(\dfrac{p_1 - p_2}{L}\right)$

...voilá: $u(y) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) y^2 + \frac{d^2}{2\mu}\left(\frac{p_1 - p_2}{L}\right) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2\mu L}\right)\left(d^2 - y^2\right).$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	15	5	35	100
Nota							

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\, u_i) = 0$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta)$, $i_y = (i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$, $i_z = i_z$

$$\begin{aligned} u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} &= \frac{\partial \phi}{\partial r} & u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ u = \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} & v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned}$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar		
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r} + u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta} + u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente	$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\,u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$