IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta.

(a) Considere um vórtice circular irrotacional. Nele, a circulação calculada num circuito de raio r onde $0 < r < \infty$ é zero. A. Certo **B. Errado** [4]

Resposta:
Errado. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. No caso irrotacional $u_\theta = \frac{C}{r}$ e num círculo $dl = r\,d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \frac{C}{r}.r d\theta = \oint_0^{2\pi} C d\theta = 2\pi C \neq 0$

(b) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$, com $i \neq j$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. A. Errado **B. Certo** [4]

Resposta:
Sim, exclui $i = j$. ou seja, exclui $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

(c) Considere uma gota esférica, típica de tinta de impressora com volume de 10 pl[1], submersa, com o centro a $h = 10$ cm de profundidade num tanque com óleo mineral (i.e. óleo Johnson) com densidade ρ_{bb} em repouso. A pressão no centro dela é dada exatamente por $p = p_{atm} + \rho_{bb} g h$ na notação usual. **A. Errado** B. Certo [4]

Resposta:
Errado, numa bolha desse tamanho ($r = 1.3 \times 10^{-7}$ m a tensão superficial é dominante.

(d) A força de Coriolis não acrescenta ou retira energia do sistema pois é sempre perpendicular ao deslocamento. **A. Certo** B. Errado [4]

Resposta:
Correto; *ergo* não realiza trabalho.

(e) Para que a equação de Bernoulli na forma $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p = B$. seja aplicável, basta que o fluxo seja irrotacional e incompressível, pois isso equivale à inviscidez. **A. Errado** B. Certo [4]

Resposta:
Errado, o fluxo também precisa ser estacionário.

[1] pl = picolitro = 10^{-12}l

2. Marque uma alternativa correta (f=campo escalar, $\vec{u}$=campo vetorial): $\boxed{10}$

$\nabla \times (\nabla f)$	$\surd$ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \times (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	$\surd$ **NDA**
$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$	○ Vetor	$\surd$ **Escalar**	○ NDA	$\nabla(\nabla \cdot f)$	○ Vetor	○ Escalar	$\surd$ **NDA**
$\nabla \cdot (\nabla \times f)$	○ Vetor	○ Escalar	$\surd$ **NDA**	$\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	$\surd$ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA
$\nabla \times (\nabla \times \vec{u})$	$\surd$ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla f)$	○ Vetor	$\surd$ **Escalar**	○ NDA
$\nabla(\nabla \cdot \vec{u})$	$\surd$ **Vetor**	○ Escalar	○ NDA	$\nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{u})$	○ Vetor	○ Escalar	$\surd$ **NDA**

3. Converta o fluxo dado pelas equações abaixo para coordenadas cilíndricas e diga se é incompressível ou não, demonstrando matematicamente. Descreva brevemente como é o fluxo. $\boxed{15}$

$$\begin{cases} u &= \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,\hat{i} \\ v &= \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\hat{j} \\ w &= \dfrac{22}{7}\,\hat{k} \end{cases}$$

Resposta:

Sim. Há várias maneiras de se chegar na resposta certa (e mais ainda de se chegar na errada).

As equações acima lembram as de um círculo. O módulo de $\vec{v}$ é constante ao longo de círculos. Agora fica evidente que é mais fácil trabalharmos num sistema de coordenadas cilíndrico (r, θ, z) associado ao cartesiano (x,y,z). Nesse sistema $y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$ e $r = \sqrt{(}x^2+y^2)$, portanto a velocidade é:

$$\vec{v} = -\frac{\sin\theta}{r}(i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{r}(i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta) + \frac{22}{7}i_z.$$

Note que dentro dos parênteses você tem os versores convertidos. Agrupando em i_r e i_θ,

$$\vec{v} = 0i_r + \frac{1}{r}i_\theta + \frac{22}{7}i_z;$$

ou seja, temos a componente u_θ que depende só do raio (decai com o inverso do raio) e a componente u_z (constante). Do divergente em coordenadas cilíndricas sobram $\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\hat{i_\theta}$ e $\frac{\partial u_z}{\partial z}\hat{i_z}$ que são obviamente nulas.

4. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual aplicável aos oceanos terrestres:

$$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} \;=\; -\vec{\nabla}p \;+\; \mu_{H_2O}\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho_{H_2O}\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}_{♁} \times (\vec{\Omega}_{♁} \times \vec{r})) \;-\; 2\rho_{H_2O}\vec{\Omega}_{♁} \times \vec{u}. \tag{1}$$

Ela vale em qualquer oceano, inclusive no de Gliese 667 Cb (♉), cujo raio é $R_{♉} = 3R_{♁}$ e cuja aceleração da gravidade é $g_{♉} = 0.777g_{♁}$. O dia desse exoplaneta é 1.93 $d_{♉} = d_{♁}$ e a temperatura na superfície é de $360°$C. O oceano é feito de Cádmio líquido, cuja densidade é $8.6\rho_{H_2O}$ e cuja viscosidade é 2.5×10^{-3} Pa.s, 250% maior que a da água.

(a) No equador de Gliese 667 Cb a aceleração centrífuga representa que percentual da gravidade $g_{♉}$? $\boxed{5}$

Resposta:
No equador, $\cos(\theta) = 1$, portanto $a_{\mathfrak{z}} = \Omega_{\mathfrak{z}}^2 R_{\mathfrak{z}}$. Note que $\Omega_{\mathfrak{z}} = \frac{2\pi 1.93}{86400} = 1.4035 \times 10^{-4}$; $R_{\mathfrak{z}} = 3R_{\eth} = 3(6.371 \times 10^6) = 1.9113 \times 10^7$m portanto $a_{\mathfrak{z}} = (1.4035 \times 10^{-4})^2.1.9113 \times 10^7 = 0.37651$ ms^{-2}, sendo $g_{\mathfrak{z}} = 0.777 \cdot 9.81 = 7.6224$ ms^{-2}, portanto $\frac{a_{\mathfrak{z}}}{g_{\mathfrak{z}}} = 4.94\%$.

(b) A equação 1 tem 6 termos. Quais componentes de quais termos contém o balanço hidrostático? $\boxed{5}$

Resposta:
A componente vertical do segundo (gradiente de pressão), quarto (peso) e quinto (centrífuga) termos.

(c) Calcule a pressão no fundo do oceano de Gliese 667 Cb, no Polo Norte, se a profundidade é de 32500 m. $\boxed{5}$

Resposta:
$p = \rho_{Cd} g_{\mathfrak{z}} z = 8.6 \cdot 1000 \cdot 7.6224 \cdot 32500 = 2.13 \times 10^9$ Pa pois no polo $\cos\theta = 0$, o quinto termo é nulo.

---

5. Suponha que temos um tanque de 18 m de raio e nele fazemos um vórtice aproximadamente irrotacional e estável cujo olho tem um raio idealmente pequeno. A “força” centrífuga por unidade de volume para um raio de 0.08 m é 7.2 N.m^{-3}.

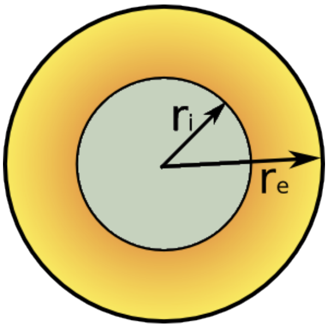
(a) Que termo da equação de Navier–Stokes faz o papel de força centrípeta nesse vórtice? $\boxed{5}$

Resposta:
O gradiente de pressão.

(b) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais: $\frac{1}{2}u^2 + gz + \int \frac{dp}{\rho} = B$ e calcule a depressão $z(r)$ (em m) para $r = 25$ cm e $r = 0.5$ cm. $\boxed{15}$

Resposta:
A interface constitui uma superfície de pressão constante (atmosférica), portanto as constantes e as integrais são iguais: $\dfrac{1}{2}u_\infty^2 + gz_\infty + \int \dfrac{dp}{\rho} = C = \dfrac{1}{2}u_{25}^2 + gz_{25} + \int \dfrac{dp}{\rho}$
Mas se $r \to \infty$ $u_\theta \to 0$ $z \to 0$ a eq. de Bernoulli se reduz a
$\dfrac{1}{2}u_{25}^2 = -gz_{25}$
Como é um vórtice irrotacional: $u_{25} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{0.25} = 0.0077$ ms^{-1}
Inserindo na eq. de Bernoulli: $\dfrac{1}{2}(0.0077)^2 = -9.81 z_{25} \quad \Rightarrow z_{25} = 3 \times 10^-6$ m,
e no caso de r=0.5 cm temos: $u_{0.5} = \frac{C}{r} = \frac{0.00192}{.005} = 0.384$ ms^{-1}
$\dfrac{1}{2}(0.384)^2 = -9.81 z_{0.5} \quad \Rightarrow z_{0.5} = 7.5 \times 10^-3$ m ou seja 7.5 mm.

6. Considere dois cilindros vistos de cima na figura abaixo. O interno, de raio r_i está parado e o



externo, de raio r_e se move com velocidade angular Ω. Considere o fluxo laminar e o coeficiente de viscosidade dinâmica μ constante. Assuma a condição de contorno de não–escorregamento junto às paredes do cilindro. Esta é a versão mais simples desse problema que já foi tratado por:

- Newton,
- Taylor,
- Stokes,
- Couette,
- Chandrasekar e outros notáveis. Agora é a sua vez.

(a) Obtenha o perfil de velocidades $u_\theta(r)$ em função das variáveis conhecidas. $\boxed{10}$

Resposta:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{du_\theta}{dr} \quad \text{integrando dos 2 lados} \quad \frac{\tau}{\mu} r = u_\theta + C \quad \text{ou} \quad u_\theta = \frac{\tau}{\mu} r + C$$

Usando a condição de contorno interna:

$$u_\theta = 0 \text{ em } r = r_i \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\tau}{\mu} r + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\tau}{\mu} r_i$$

Usando a condição de contorno externa e substituindo C:

$$u_\theta = \Omega r_e \text{ em } r = r_e \quad \Rightarrow \quad \Omega r_e = \frac{\tau}{\mu}(r_e - r_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad u_\theta = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i}(r - r_i).$$

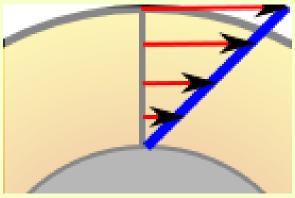
(b) Obtenha a tensão de cisalhamento em qualquer ponto do fluido em função das variáveis conhecidas. $\boxed{5}$

Resposta:
Da condição de contorno externa:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mu \Omega r_e}{r_e - r_i}$$

(c) Esboçe o perfil de velocidades. $\boxed{5}$

Resposta:



♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	15	20	20	100
Nota							

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$y = r\cos\theta$, $x = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta)$, $i_y = (i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$, $i_z = i_z$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r, \theta, z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r, \theta, z)_{\hat{i_r}}$	$+$	$u_\theta(r, \theta, z)_{\hat{i_\theta}}$	$+$	$u_z(r, \theta, z)_{\hat{i_z}}$
Gradiente	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i_r}}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i_\theta}}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i_z}}$
Divergente	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i_r}}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i_\theta}}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i_z}}$