IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? Justifique as falsas.

   (a) Na equação da conservação de energia o termo de dissipação viscosa Φ é introduzido através da substituição da equação constitutiva de fluidos Newtonianos no termo de trabalho das forças de corpo. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   A substituição é no trabalho das forças de **superfície**, pois o cisalhamento gera dissipação.

   (b) A equação da continuidade não pode ser simplificada para a forma $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ quando estudamos circulação abissal. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

   Resposta:
   Ela pode ser simplificada pois o **gradiente** de densidade é pequeno apesar da enorme pressão.

   (c) O potencial de velocidade é definido para fluxos bidimensionais não–divergentes. **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

   Resposta:
   É definido para fluxos **irrotacionais**.

   (d) As forças de Coriolis e centrífuga são fundamentalmente diferentes da força gravitacional pois dependem da velocidade do sistema de referência e não de propriedades da matéria. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Dependem da **variação** da velocidade (rotação=aceleração) do sistema de referência e não da velocidade.

   (e) Apenas nos fluidos Newtonianos a deformação é linearmente proporcional à tensão. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

   Resposta:
   Essa é a definição de fluido Newtoniano.

2. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g} + \rho(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega} \times \vec{u}. \tag{1}$$

   (a) Em que latitude(s) a aceleração centrífuga tem magnitude máxima? $\boxed{5}$

Resposta:
No equador $\cos(\theta) = 1$.

(b) Simplifique a equação 1 para o caso estacionário, não–linear e forçado pelo vento, usando a gravidade aparente. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \;=\; -\vec{\nabla}p + \;\mu\nabla^2\vec{u} \;+\; \rho\vec{g_a} \;+ -\; 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}.$$

(c) Simplifique a equação 1 para um fluxo estratificado, linear e invíscido que ocorre sobre o equador de um planeta que gira rápido. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \;=\; -\vec{\nabla}p \;\;+\; \rho\vec{g} \;+\; \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})).$$

3. Suponha que a bactéria X é extremamente sensível a mudanças repentinas de pressão e torna–se inativa se a pressão variar de mais de 10^4N.m^2 em 1s. Ondas capilares com período de 0.1s são geradas na superfície plana do mar e quando quebram por *microbreaking* ejetam gotículas de .1mm de raio. Uma bactéria X está junto à superfície, uma onda capilar quebra e ela é capturada numa gotícula. Ela ficará inativa? $\boxed{15}$

Resposta:
Lembrando que para uma gota $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$, na gotícula a pressão é $1.66{\times}10^4$N.m^2. Como o período da onda é de muito menos que 1s, a compressão na gotícula passa de 10^4N.m^2.s^{-1} e a bactéria fica inativa.

4. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação: $\boxed{10}$

$$\rho\frac{DS}{Dt} \;=\; \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) \;-\; \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T \;+\; \frac{\Phi}{T}$$

Substitua nela a equação da difusão simples de calor (lei de Fourier) e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nessa nova equação o(s) termo(s) relativo(s) à produção de entropia e explique o processo físico associado a ele(s).

Resposta:

$$\underbrace{\rho\frac{DS}{Dt}}_{\text{var. da entropia}} \;=\; \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}_{\text{converg. calor}} \;+\; \underbrace{\frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2}_{\text{prod.ent.condução}} \;+\; \underbrace{\frac{\Phi}{T}}_{\text{prod.ent.viscosidade}}$$

5. O fluxo dado pelas equações abaixo é incompressível? Explique a sua resposta (b é constante). 15

$$\begin{cases} u_r &= \frac{1}{r}\cos(br^2) \\ u_\theta &= 2r\theta b\frac{\sin(2br^2)}{\cos(br^2)} \\ u_z &= -2bz\sin(br^2) \end{cases}$$

Resposta:

Divergente em coordenadas cilíndricas:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{U} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Para o 1º termo do lado direito, $ru_r = \cos(br^2)$ portanto:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -2b\sin(br^2).$$

A derivada em z do 3º termo do lado direito é trivial:

$$\frac{\partial[-2bz\sin(br^2)]}{\partial z} = -2b\sin(br^2).$$

Antes de se escabelar com a derivada do 2º termo, lembre que
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, portanto
$2\sin(2x) = 4\sin(x)\cos(x)$ e
$4\sin(x) = \frac{2\sin(2x)}{\cos(x)}$.
Faça $x = 2br^2$ e multiplique tudo por $r\theta b$ para obter $4r\theta b\sin(br^2)$.
Desta forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial[4r\theta b\sin(br^2)]}{\partial\theta} \quad = \quad 4b\sin(br^2).$$

A soma é nula e portanto o fluxo é incompressível.

6. Considerando o fluxo independente do tempo descrito pela função de corrente:

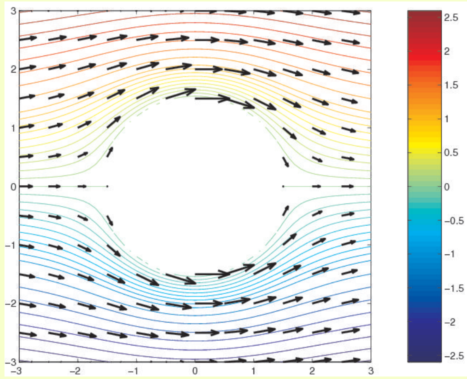
$\psi = U\,y\left(1 - \dfrac{a^2}{x^2+y^2}\right)$, com U e a constantes reais. A Pressão em $x = \pm\infty$ é P_∞.

(a) Esboce as linhas de corrente para $\sqrt{x^2+y^2} \geq a$. 5

Dicas: Comece por $\psi = 0$; Depois analise $\psi(x \to \pm\infty)$.

Resposta:

Se $\psi = 0$ as raízes são $y = 0$ e $1 = \frac{a^2}{x^2+y^2}$, uma reta horizontal e um círculo de raio a. Comece por aí. Para $\psi(x \to \pm\infty)$ (ou $\psi(y \to \pm\infty)$) temos $\psi = Uy$, um feixe de retas paralelas horizontais. Essas retas se curvam em torno do círculo $\sqrt{x^2+y^2} = a$.



(b) Calcule as componentes da velocidade. Que situação real este fluxo pode representar? $\boxed{5}$

Dicas: Use a definição de ψ; Depois analise as componente u e v se $x \to \pm\infty$).

Resposta:
Da definição de ψ basta acertar as derivadas para obter

$$u = -U\left[1 - \frac{a^2}{(x^2+y^2)} + -\frac{2a^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] \quad \text{e} \quad v = \frac{2Uxya^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\text{Portanto} \lim_{x\to\pm\infty} u = -U \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} v = 0, \text{ o campo distante é horizontal.}$$

Isso representa um cilindro vertical longo imerso em um fluxo constante no plano $z = C$.

(c) Mostre que o fluxo é irrotacional. Calcule a pressão para $y = 0$ usando a equação de Bernoulli com $z = C$, C constante. $\boxed{10}$

Dicas: Se o fluxo é irrotacional $\nabla^2(\psi) = 0$.
Use Bernoulli com um ponto no $x = \infty$ e o outro num ponto qualquer:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} + gC = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gC$$

Sendo $Q^2 = u^2 + v^2$ (módulo da velocidade. Substitua $y = 0$ em u e v e voilá!

Resposta:
De novo, basta acertar as derivadas segundas para obter

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{2Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Ux^2y^2a^2}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{e} \quad v = \frac{6Uya^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8Uy^3a^2}{(x^2+y^2)^3},$$

cuja soma é o Laplaciano e é nulo, portanto o campo externo ao círculo de raio a é irrotacional. Agora vamos usar a eq. de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{Q^2}{2} = \frac{P_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

resolvendo para p:

$$p = \rho\frac{U^2 - Q^2}{2} + P_\infty.$$

Substituindo u e v em Q e fazendo $y = 0$:

$$p = P_\infty + \frac{\rho U^2 a^2}{2x^2}\left(2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

(d) Qual o valor máximo da pressão e onde ela ocorre? 5

Resposta:
Note da penúltima equação que a pressão é máxima onde $Q^2 = 0$ pois U é constante e P_∞ também. Inspecionando as fórmulas de u e v vemos que isso ocorre em $y = 0$ e $x = \pm a$ (pontos de estagnação).

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	15	15	10	15	25	100
Nota							

Memória não–volátil:

O coeficiente de tensão superficial da água é 83×10^{-3}N.m-1.

A lei de Fourier é $\vec{q}_t = -k_t \vec{\nabla} T$ onde k_t é o coeficiente positivo de condutividade térmica.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar					
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$			
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r}$	$+\ u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+\ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r}$	$+\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+\ \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$