IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. As afirmações a seguir são certas ou erradas? Justifique sua resposta.

   (a) Num vórtice irrotacional $du_i = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = 0$. A. Certo **B. Errado** $\boxed{4}$

   Resposta:
   du_i é a velocidade relativa entre 2 partículas, portanto inclui deformação e rotação. No vórtice irrotacional há deformação. Seria zero no vórtice em rotação de corpo sólido.

   (b) A função de corrente ψ é escalar e foi deduzida a partir da equação da continuidade para fluxos incompressíveis e bidimensionais. **A. Certo** B. Errado $\boxed{4}$

   Resposta:
   Da incompressibilidade chegamos em $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$, o que em fluxos 2D permite a definição de um ψ escalar.

   (c) $\dfrac{D\vec{u}}{Dt} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})$. representa a derivada total da velocidade: **A. Errado** B. Certo $\boxed{4}$

   Resposta:
   A equação acima está errada pois o que faz sentido físico é:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \cdots \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \cdots \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z})\vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}.$$

   (d) As linhas de corrente no fluxo de um rio, do ponto de vista de um observador que voa com velocidade igual à média de velocidades numa seção reta do rio, são nulas. $\boxed{4}$
   A. Certo **B. Errado**

   Resposta:
   Errada, depende do fluxo. Só é verdade se a velocidade for constante na seção.

   (e) Dada uma interface líquido–gás, a tensão superficial é a energia necessária para se aumentar a área da superfície livre de uma unidade. A. Errado **B. Certo** $\boxed{4}$

   Resposta:
   As moléculas no interior do líquido tem energia mínima. As da interface tem mais energia de ligaação que elas, portanto para se aumentar a área é preciso executar um trabalho de deformação. A esse trabalho por unidade de área chamamos de tensão superficial.

2. A Terra gira em torno de si mesma com $\Omega_\oplus$ e em torno do Sol com $\Omega_\odot$. Na nossa dedução da equação de Navier–Stokes ignoramos completamente $\Omega_\odot$. Podemos realmente fazer isso? Justifique quantitativamente sua resposta. $\boxed{5}$

Resposta:

Sim, podemos pois $\Omega_\oplus >>> \Omega_\odot$, mais precisamente $\Omega_\oplus = 365\,\Omega_\odot$.

3. Usando 1 m^3 de água e 35 kg de Cloreto de Sódio prove quantitativamente que o efeito das interações elétricas entre a água e o sal dissolvido muda mais a densidade do que a adição de um sal mais denso que a água. Indique as aproximações e suposições utilizadas, não quero só as contas. $\boxed{15}$

Resposta:

Vejamos primeiro quanto é a mudança de densidade por contração halina supondo que a pressão e a temperatura são constantes. Isto pressupõe que a dissolução de sal na água é um processo aproximadamente isotérmico[1] e que o aumento de pressão hidrostática por causa do peso adicional de sal é desprezível. Passo a passo:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial S} dS \text{ dividindo por } \rho \text{ temos } \frac{d\rho}{\rho} = \underbrace{\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)}_{\beta} dS \text{ portanto } \Delta\rho = \beta \Delta S \rho$$

Fazendo as contas:

$$\Delta\rho_1 = \beta\Delta S\rho \quad = 7.9 \times 10^{-4}\,\text{psu}^{-1}\,35\,\text{psu}\,1000\,\text{kg.m}^{-3} \quad = 28\,\text{kg.m}^{-3}$$

Vejamos agora quanto muda a densidade por estarmos adicionando um soluto mais denso que a água. Para isolar os dois efeitos assumo que não há contração halina :

$$\Delta\rho_2 = \rho_m - \rho = \frac{m_{H_2O} + m_{NaCl}}{V_{H_2O} + V_{NaCl}} - \rho,$$

precisamos do volume de NaCl que causa salinidade 35 psu. Este é de aproximadamente 35 partes por 1000 em termos de massa. Como temos 1 m^3 de água, temos 1000 kg precisamos de 35 kg de sal. Como a densidade do sal é 2.16 g.cm^{-3} são $\frac{35}{2160} = 0.016$ m^{-3}. Voltando à diferença de densidade,

$$\Delta\rho_2 = \frac{1000 + 35}{1 + 0.016} - 1000 \quad = 1018.7 - 1000 \quad = 19\,\text{kg.m}^{-3}.$$

Como $\Delta\rho_1 > \Delta\rho_2$ vemos que o efeito dominante é a contração halina causada pelas interações elétricas entre a água e o sal dissolvido.

4. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação: $\boxed{10}$

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{\vec{q}}{T^2}\cdot\vec{\nabla}T + \frac{\Phi}{T}$$

Neste caso S é a entropia, $\vec{q}$ é o fluxo de calor, T a temperatura e Φ a dissipação viscosa. Substitua nela a equação da difusão simples de calor (lei de Fourier) e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nessa nova equação o(s) termo(s) relativo(s) à produção de entropia e explique o processo físico associado a ele(s).

Resposta:

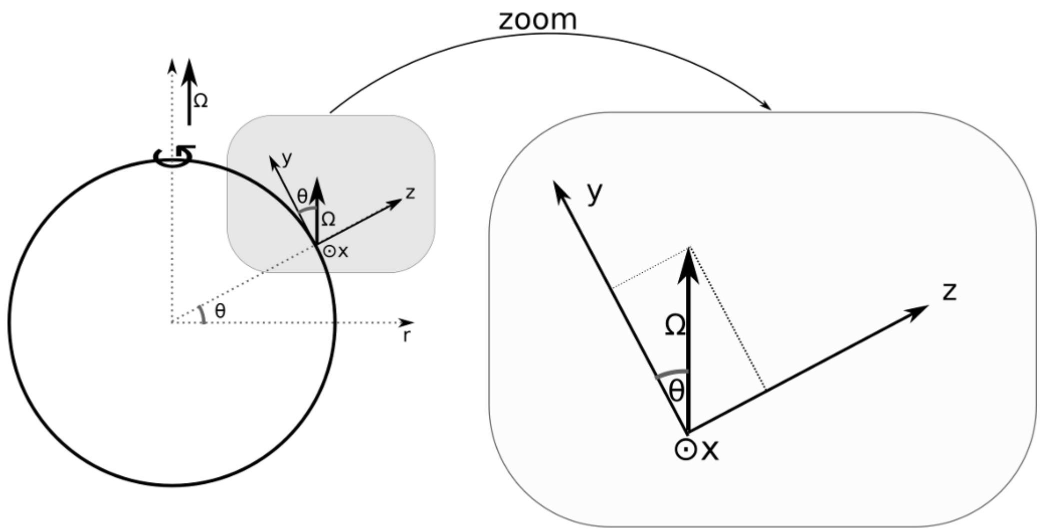
$$\underbrace{\rho\frac{DS}{Dt}}_{\text{var. da entropia}} = \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}_{\text{converg. calor}} + \underbrace{\frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2}_{\text{prod.ent.condução}} + \underbrace{\frac{\Phi}{T}}_{\text{prod.ent.viscosidade}}$$

5. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\nabla^2\vec{u} + \vec{g_e} - 2\vec{\Omega}\times\vec{u}. \tag{1}$$

(a) Considere primeiro o termo de Coriolis. Projete $\vec{\Omega}$ no sistema Cartesiano local como indicado na figura abaixo por (x, y, z) completando as fórmulas das componentes do vetor: $\boxed{5}$

$$\Omega_x = \_\_\_\_\_$$
$$\Omega_y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$\Omega_z = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$



Resposta:

$$\Omega_x = 0$$
$$\Omega_y = \Omega\cos\theta$$
$$\Omega_z = \Omega\sin\theta$$

(b) Considere a equação 1 aplicada a um problema de circulação de larga escala, sendo que: $\boxed{15}$

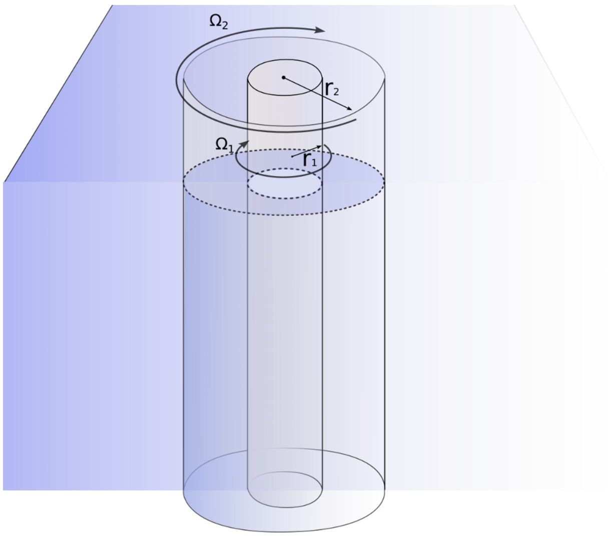
- Despreze balanço de forças na vertical, a hidrostática domina e podemos tirá–la da equação 1 assim: no termo do gradiente de pressão troque a pressão total p pela anomalia em relação à pressão hidrostática que chamaremos de p';

- O fluxo é aproximadamente invíscido e homogêneo;
- Estamos trabalhando com uma única tomada de dados, portanto assumimos que o fluxo é estacionário;
- O termo não–linear é pequeno em relação aos outros.

Escreva as equações das componentes horizontais do balanço de forças, com $f = 2\Omega \sin\theta$.

Resposta:

$$\begin{aligned} fv &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} \\ fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} \end{aligned}$$

6. 

Para variar, considere o fluxo laminar entre dois canos cilíndricos concêntricos, de paredes finas, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do cano interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do cano externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há água dentro do cilindro interno, entre os dois cilindros e fora do cilindro externo até $r \to \infty$. Os canos são vazados e longos, de modo que há simetria na dimensão vertical z. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \tag{3}$$

$$\text{onde} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{4}$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: 5

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} && (5) \\ 0 &= \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right) && (6) \end{aligned}$$

Associe ordenadamente os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 2 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 5.

Resposta:

1. $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ Fluxo estacionário,
2. $u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$ linear,

3. $\frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$ fluxo radial zero, e fluxo tangencial independente de θ. Note que não pode ser simplesmente invíscido pois há um termo em μ na equação 6

(b) Para obter u_θ no espaço entre os cilindros, integre a Equação 6 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. Use as condições de não–escorregamento nos contornos interno ($u_\theta = \Omega_1 r_1$ em $r = r_1$) e externo ($u_\theta = \Omega_2 r_2$ em $r = r_2$) para determinar essas constantes. $\boxed{10}$

Resposta:
Como u_θ só é função de r, $\partial \to d$. Integrando dos dois lados temos:

$$\int \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(ru_\theta)}{dr}\right)dr = \int 0dr$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(ru_\theta)}{dr} + C = 0 \quad \text{multiplicando por } r$$

$$\frac{d(ru_\theta)}{dr} + Cr = 0 \quad \text{integrando de novo em } r$$

$$\int \frac{d(ru_\theta)}{dr}dr = \int -Crdr$$

$$ru_\theta = -C\frac{r^2}{2} - D \quad \text{dividindo por } r$$

$$u_\theta = -\frac{C}{2}r - \frac{D}{r} \quad \text{definindo } A = -\frac{C}{2} \quad B = -D$$

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Utilizando as condições de contorno obtemos:

$$A = \frac{\Omega_2 r_2^2 - \Omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad \text{que resulta em}$$

$$u_\theta = \frac{1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}\left\{\left[\Omega_2 - \Omega_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]r\right\} + \frac{r_1^2}{r}(\Omega_1 - \Omega_2)$$

(c) Como fica u_θ quando $r_2 \to \infty$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
Todos os termos com r_2 no denominador vão para zero, restando $u_\theta = \frac{\Omega_1 R_1^2}{r}$, um vórtice irrotacional.

(d) Como fica u_θ quando $r_1 \to 0$? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
Todos os termos com r_1 no numerador vão para zero, restando $u_\theta = \Omega_2 R_2$, um vórtice em rotação de corpo sólido.

(e) Como fica u_θ quando consideramos os campos interno e externo a um cilindro de raio r_1 girando com velocidade angular Ω_1 num oceano infinito? Fisicamente o que representa esse fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
É a soma das duas soluções acima, um vórtice de Rankine.

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	5	15	10	20	30	100
Nota							

Memória não–volátil:

A densidade da água pura é 1000 kg.m^{-3}.
A densidade do sal NaCl é 2.16 g.cm^{-3}.
O coeficiente de tensão superficial da água é 83×10^{-3}N.m^{-1}.
O coeficiente de expansão térmica da água é 4×10^{-5}K^{-1}.
O coeficiente de contração halina é 7.9×10^{-4}psu^{-1}.

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{T,S} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T} dS$$

A lei de Fourier é $\vec{q_t} = -k_t \vec{\nabla} T$ onde k_t é o coeficiente positivo de condutividade térmica.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Função escalar	$E =$	$E(r,\theta,z)$				
Função vetorial	$\vec{V} =$	$u_r(r,\theta,z)_{\hat{i}_r}$	$+$	$u_\theta(r,\theta,z)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$u_z(r,\theta,z)_{\hat{i}_z}$
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla} \times \vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Esta é a definição de ψ em coords. cartesianas:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Esta é a definição de ψ em coords. cilíndricas:

$$\begin{cases} u_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r}. \end{cases}$$