Prova II

Nome:____________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer regra abaixo anulará o teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

♠

1. Volume material se move acompanhando o fluxo e tem superfícies externas elásticas que encerram uma quantidade fixa de matéria. 5

   A. Certo

   B. Errado

2. Num fluxo qualquer, a mudança de referencial não altera as linhas de corrente. 5

   A. Certo

   B. Errado

3. Vírus é muito menor que bactéria. Considerando estes seres microscópicos aproximadamente esféricos e compostos 100% de água, a afirmação que a pressão dentro de um vírus é maior que dentro de uma bactéria está correta? Justifique sua resposta com base em seu conhecimento sobre tensão superficial. 5

   Resposta:

   Sim. A tensão é inversamente proporcional ao raio, portanto a pressão por ela causada é maior no vírus por ele ser menor.

4. Mostre que,se um fluxo bi-dimensional tem Laplaciano da função de corrente zero, então ele é obrigatoriamente irrotacional.(Dica: use a definição de função de corrente e aplique-a no Laplaciano) 10

   Resposta:

   $\vec{\nabla}^2\psi = 0$

   $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$

   Da definição de ψ,

   $$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2\psi = \frac{\partial(-v)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)_k = 0 \text{ QED.}$$

5. Considere a equação de Cauchy:

   $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho\vec{g} + \vec{\nabla}\tau \tag{1}$$

   onde τ é o tensor das tensões.

   (a) A equação 1 expressa, por unidade de volume, a conservação de que grandeza física? 5

Resposta:
Momentum.

(b) Desenvolva o termo advectivo da equação 1 com todas as suas componentes em (x, y, z, u, v, w) e explique o significado físico deste termo. $\boxed{10}$

Resposta:
O termo advectivo é obtido a partir da derivada material:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Desenvolvendo:

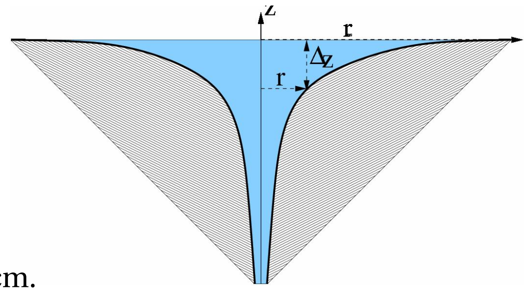
$$\begin{aligned} &u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \cdots \\ &v\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial y} + \cdots \\ &w\frac{\partial u}{\partial z} + w\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Ele expressa a advecção pela componente da velocidade numa dada direção (e.g. u) da variação de uma componente qualquer da velocidade (e.g. v) nessa direção (e.g. x).

(c) Complete corretamente a afirmação: "A unidade SI de cada componente de $\vec{\nabla}\tau$ é $\cdots$". $\boxed{5}$

Resposta:
$N\,m^{-3}$.

6. O redemoinho que se forma no ralo de uma piscina é essencialmente um vórtice irrotacional como ilustra a figura ao lado. A velocidade tangencial é $u_\theta = 30$cm.s^{-1} para $r = 8$cm.(Lembrete: num vórtice irrotacional a velocidade tangencial é inversamente proporcional ao raio.)



(a) Calcule a velocidade tangencial em $r = 2$mm e $r = 40$cm. $\boxed{10}$

Resposta:
$u_\theta = \frac{C}{r}$
em $r = 8 \quad u_\theta = 30 \Rightarrow C = 30 \times 8 = 240$cm^{2}s^{-1}.
Em r=2mm $u_\theta = \dfrac{240}{0.2} = 1200$ cm s^{-1}.
Em r=40cm $u_\theta = \dfrac{240}{40} = 6$ cm s^{-1}.

(b) Utilize a forma geral da equação de Bernoulli para fluxos irrotacionais, $\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + P = B$ e calcule a depressão $z(r)$ em $r = 25$ cm e $r = .5$ cm. $\boxed{10}$

Resposta:
A interface constitui uma superfície de pressão constante (atmosférica), portanto as constantes e as integrais são iguais: $\dfrac{1}{2}u_\infty^2 + gz_\infty + \int \dfrac{dp}{\rho} = C = \dfrac{1}{2}u_{25}^2 + gz_{25} + \int \dfrac{dp}{\rho}$
Mas se $r \to \infty$ $u_\theta \to 0$ $z \to 0$ a eq. de Bernoulli se reduz a
$\dfrac{1}{2}u_{25}^2 = -gz_{25}$
Analogamente ao item anterior: $u_{25} = \frac{C}{r} = \frac{240}{25} = 9.6$ cms^{-1}

Inserindo na eq. de Bernoulli: $\dfrac{1}{2}(9.6)^2 = -981 z_{25} \quad \Rightarrow z_{25} = -0.047$ cm,
e no caso de r=0.5 cm temos: $u_{0.5} = \frac{C}{r} = \frac{240}{.5} = 480$ cms^{-1}
$\dfrac{1}{2}(480)^2 = -981 z_{0.5} \quad \Rightarrow z_{0.5} = -117$ cm.

7. Considere a **equação de Navier–Stokes** na notação usual e responda:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \rho \vec{g}. \tag{2}$$

(a) Considere um fluxo invíscido e linear e escreva a equação simplificada. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g}. \tag{3}$$

(b) Desmembre a equação anterior em termos das 3 componentes x, y e z e das respectivas velocidades u, v e w. $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \tag{4}$$
$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} \tag{5}$$
$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g \tag{6}$$

(c) Determine as componentes u, v e w sabendo que as mesmas dependem apenas do tempo e que $P = A(x+y)\cos(\omega t) + \rho g z$. Considere, ainda, ρ constante. $\boxed{5}$

Resposta:

$$u = \frac{A}{\rho\omega}\sin(\omega t) + K_1 \tag{7}$$
$$v = \frac{A}{\rho\omega}\sin(\omega t) + K_2 \tag{8}$$
$$w = K_3 \tag{9}$$

8. Durante o curso a segunda lei da termodinâmica e a equação da continuidade foram combinadas na dedução desta equação:

$$\rho \frac{DS}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{q}}{T}\right) - \frac{\vec{q}}{T^2} \cdot \vec{\nabla} T + \frac{\Phi}{T} \tag{10}$$

(a) Utilize a equação da difusão simples de calor (lei de Fourier) no segundo termo do lado direito de 10 e obtenha a **equação da produção de entropia**. Identifique nela os seguintes termos: $\boxed{5}$

1. variação total da entropia,
2. convergência do fluxo de calor,
3. produção de entropia por condução e

4. produção de entropia por atrito viscoso.

Resposta:

$$\underbrace{\rho\frac{DS}{Dt}}_{\text{var. da entropia}} = \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{T}\right)}_{\text{converg. calor}} + \underbrace{\frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2}_{\text{prod.ent.condução}} + \underbrace{\frac{\Phi}{T}}_{\text{prod.ent.viscosidade}}$$

(b) Simplifique a equação obtida no primeiro item considerando um fluxo invíscido com divergente do fluxo de calor igual a zero. Este caso restringe a tendência da entropia? $\boxed{5}$

Resposta:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = \frac{k}{T^2}(\vec{\nabla}T)^2$$

Sim, restringe a valores não–negativos, ou seja, a entropia se conserva (caso isotérmico) ou aumenta com o tempo (caso geral).

(c) Simplifique a equação obtida no primeiro item considerando um fluxo invíscido e horizontalmente isotérmico. $\boxed{10}$

Resposta:
O último termo se anula pela inviscidez. Todas as derivadas de T em x e y do penúltimo termo se anulam e restam estes termos:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = -\frac{\partial\left(\frac{q_x}{T}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{q_y}{T}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{q_z}{T}\right)}{\partial z} + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2$$

usando a regra do quociente, anulando as derivadas de T em x e y e reagrupando o divergente temos:

$$\rho\frac{DS}{Dt} = -\frac{1}{T}\vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{q_z}{T^2} + \frac{k}{T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	5	5	5	10	20	20	15	20	100
Nota									