IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:________________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

Violação de uma das regras anulará a prova.

- Desligue e guarde o celular.
- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.

♠

1. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Justifique as incorretas. 10

A. A hipótese do contínuo se justifica pois distância entre as moléculas é pequena em comparação ao tamanho delas.

Resposta:
Errado. É pequena em relação ao livre caminho médio, que é a distância média entre duas interações entre moléculas.

B. A dimensão do torque é [ML^{2}T^{-2}].

Resposta:
Certo

C. Em um fluxo 2D, estacionário e na direção $\hat{x}$, linhas de corrente paralelas ao eixo x com valores de ψ igualmente espaçados indicam cisalhamento constante na direção $\hat{y}$.

Resposta:
Errado, indicam fluxo constante.

D. Numa placa flutuante instalamos um CTD e todo o aparato eletro-eletrônico[1] para fazê-lo funcionar e transmitir os dados pela internet. Isso é um flutuador Lagrangeano de baixo custo.

Resposta:
Errado. A parte emersa é forçada pelo *stress* do vento. A parte submersa é forçada pelo *stress* das correntes. A trajetória não segue o fluxo da água e nem o do ar.

E. A derivada total ou material tem dois termos: o local e o advectivo. O advectivo é chamado de não-linear, pois podemos usar a regra do produto para colocar alguns termos na forma $\frac{1}{2}\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}$.

Resposta:
Yup! certinho.

2. Mostre matematicamente que o termo não-linear da derivada material pode modificar a frequência e o comprimento de uma onda unidimensional da forma $u(x,t) = A\,\sin(kx - \omega\,t)$, com A, k, e ω. constantes. 10

Resposta:
A taxa de variação da velocidade a por causa do termo não-linear é, neste caso 1D,

$$a = \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial(A\,\sin(kx-\omega t))^2}{\partial x} = \frac{A^2}{2}\frac{\partial(\sin(kx-\omega t))^2}{\partial x},$$

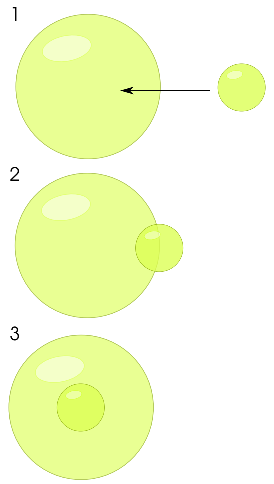
aplicando a regra da cadeia... aplicando a regra do seno da soma...

$$= \frac{A^2 k}{2}\,2\,sin(kx-\omega t)\,\cos(kx-\omega t) = \frac{A^2 k}{2}\,sin(2kx-2\omega t).$$

[1] GPS, baterias, células solares, modem, processador, antena

Portanto dobra a frequência e o comprimento de onda cai pela metade.

3. Considere que no quadro (1) da figura abaixo a bolhinha tem raio r e, no quadro (2), ela colide com a bolhona de raio R, sendo $R^3 \gg r^3$. No quadro (3) a bolhinha atravessou a parede e se instalou no centro, entretanto sem trocar fluido com a bolhona. Considere que a tensão superficial do sabão da bolhinha é σ_1 e a da bolhona é σ_2. Qual a diferença de pressão entre o interior da bolhinha e a região fora da bolhona? $\boxed{10}$



Resposta:
As bolhas tem 2 interfaces, portanto no quadro (1) temos, para a bolhinha $\Delta p_1 = \frac{4\sigma_1}{r}$ e para a bolhona $\Delta p_2 = \frac{4\sigma_2}{R}$. A tensão superficial mantém a diferença de pressão entre as partes interna e externa de cada bolha. Portanto as pressões se somam no quadro (3), resultando em

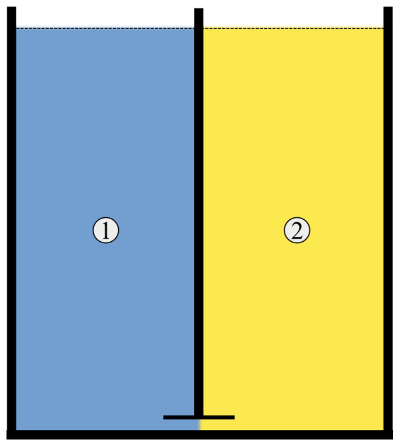
$$\Delta p = \frac{4\sigma_1}{r} + \frac{4\sigma_2}{R} = 4\left(\frac{R\sigma_1 + r\sigma_2}{rR}\right).$$

Resposta:

4. Considere uma cuba de base retangular cuja seção transversal é mostrada na figura abaixo. Ela tem 15 cm de altura e não está completamente cheia.

A água do lado 1 tem salinidade S_1 e temperatura T_1;
a água do lado 2 tem salinidade S_2 e temperatura T_2.
O coeficiente de expansão térmica é $\alpha = 1.8 \times 10^{-4}\ ^{\circ}\mathrm{C}^{-1}$,
o coeficiente de contração halina é $\beta = 7.6 \times 10^{-4}\mathrm{psu}^{-1}$
e o coeficiente de compressibilidade $\kappa = 4.5 \times 10^{-10}\mathrm{m}^2\mathrm{N}^{-1}$.

- Note que a cuba é vazada no fundo.
- Pense na pressão dos dois lados.
- Assuma que os coeficientes α, β e κ são constantes, e use $\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha\Delta T + \beta\Delta S + \kappa\Delta p$.
- medimos h_1, g, ρ (médio) e ρ_1.



(a) Pense de forma crítica: o termo $\kappa\Delta p$ importa? Escale a equação acima para responder. $\boxed{10}$

Resposta:
$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha\Delta T + \beta\Delta S + \kappa\Delta p$. Os termos em $\alpha\Delta T$ e $\beta\Delta S$ são da ordem de 10^{-2} para valores O[10] dos ΔT, ΔS. Já o termo $\kappa\Delta p$ com $p = \rho g z$, para uma cuba de 10 cm de altura, é O[10^{-7}], três ordens de grandeza menor, portanto não importa.

(b) Determine a altura da coluna 2 (h_2) em termos de ρ, h_1, ρ_1, α, β, ΔS, e ΔT levando em conta que $\rho \neq \rho_1 \neq \rho_2$ $\boxed{10}$

Resposta:

Se a cuba é vazada, a pressão hidrostática é a mesma dos dois lados do fundo da cuba, $p_2 = p_1 \Rightarrow \rho_2 g z_2 = \rho_1 g z_1$; $\boxed{\rho_2 = \rho_1 \frac{h_1}{h_2}}$.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha\Delta T + \beta\Delta S \quad \rho_2 - \rho_1 = \rho(-\alpha\Delta T + \beta\Delta S) \quad \rho_2 = \rho_1 + \rho(-\alpha\Delta T + \beta\Delta S)$$

Substituindo o resultado da caixinha acima, $h_2 = \dfrac{h_1}{\frac{\rho}{\rho_1}(\beta\Delta S - \alpha\Delta T) + 1}$

Resposta:

5. Com base em imagens de satélite e na trajetória de um flutuador Lagrangeano capturado por um vórtice ejetado da Confluência Brasil-Malvinas, podemos afirmar (i) que o vórtice é elíptico e (ii) que o flutuador está na borda do vórtice. Ele tem semi-eixo maior, zonal, $a = 110$ km e semi-eixo menor, meridional, $b = 90$ km. O semi-eixo zonal está alinhado com o paralelo de 35°S. A magnitude da velocidade medida pelo flutuador é $u(r,\theta) = C\, r\, ((a\, \sin\theta)^2 + (b\, \cos\theta)^2)$.
$C = 1.6918 \times 10^{-14}$ m^{-2}s^{-1}.

   (a) Qual é a **vorticidade média** na área dentro do vórtice? 15

Resposta:

Do Teorema de Stokes: $\oint_C \vec{u}\cdot\vec{dl} = \int_A \left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\cdot\vec{dA} = \int_A \vec{\omega}\cdot\vec{dA}$. Considerando-se a área plana, a vorticidade reduz-se à sua componente vertical, portanto pode ser tratada como escalar. O último termo é o produto entre a área total e a vorticidade média, $\int_A \vec{\omega}\cdot\vec{dA} = \varpi\int_A \vec{dA} = \varpi.A$. Para calcularmos a vorticidade média dentro do vórtice basta fazermos

$$\varpi = \frac{1}{C}\oint_0^{2\pi} \vec{u}\cdot\vec{dl}, \text{ mas } \vec{dl} = r\vec{d\theta} \text{ portanto como } u \parallel \theta,\ \varpi = \frac{1}{C}\oint_0^{2\pi} u\, r\, d\theta.$$

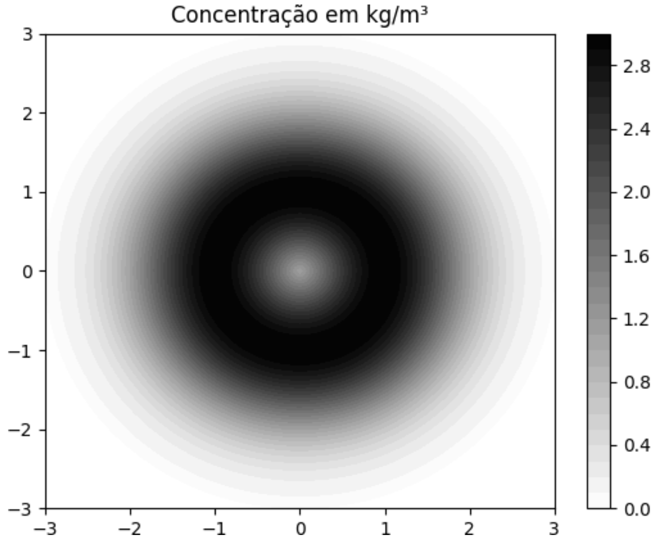
Substituindo A, u e r:

$$\varpi = \frac{1}{\pi ab}\oint_0^{2\pi} C\, \frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}}\, ((b\, \cos\theta)^2 + (a\, \sin\theta)^2)\, \frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}}\, d\theta$$

Após a simplificação algébrica, basta integrar uma constante: $\varpi = \dfrac{1}{\pi ab}\displaystyle\oint_0^{2\pi} C\,(ab)^2\, d\theta = 2Cab.$

   (b) Expresse esse valor como percentual da **vorticidade planetária** local. 5

Resposta:
Se as contas estiverem certas, a vorticidade média dá $\overline{\omega} = 3.35 \times 10^{-4}\ \mathrm{s}^{-1}$ e a planetária local é $f = -8.34 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}^{-1}$, portanto a vorticidade relativa é -401% da planetária.

6. 

Considere que a boca de uma pluma hidrotérmica é circular e que não há fluxo advectivo. A concentração de sulfeto de sódio $C[\mathrm{Na_2S}]$ é dada por:

$$C = \frac{A}{(z+B)^2}\, e^{-(R-r)^2}$$

, onde R é o raio da boca, $B = |z(fundo)| + 1$ e A é a concentração máxima, tudo em unidades do SI, com z orientado para cima, $z = 0$ na superfície, portanto $z < 0$ abaixo dela. A figura ao lado ilustra a função acima.

(a) Use difusão de Fick para obter o vetor fluxo de massa ($\vec{q}$) de $\mathrm{Na_2S}$, dado o coeficiente de difusão k. $\boxed{10}$

Resposta:
Fick nos diz que $\vec{q} = -k\vec{\nabla}C$. Olhe a definição de gradiente em coordenadas cilíndricas. Como $C = C(r, z)$ a derivada em θ é zero. A componente radial é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial r}\hat{r} = \frac{A}{(z+B)^2}\,\frac{\partial(e^{-(R-r)^2})}{\partial r} = \frac{2A(R-r)}{(z+B)^2}\, e^{-(R-r)^2}.$$

A componente vertical é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial z}\hat{z} = \frac{\partial\left(\frac{A}{(z+B)^2}\right)}{\partial z}\, e^{-(R-r)^2} = -\frac{2A}{(z+B)^3}\, e^{-(R-r)^2}.$$

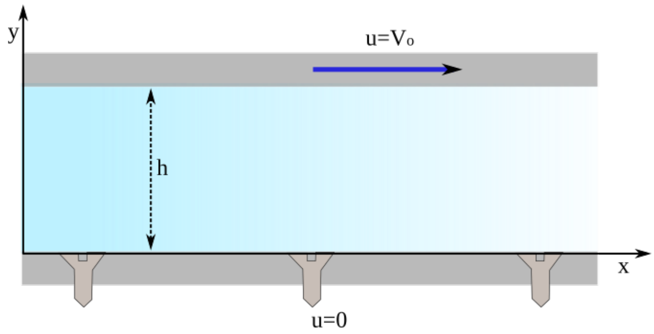
Portanto aplicando Fick obterás:

$$\vec{q} = -k\left[\left(\frac{2A(R-r)}{(z+B)^2}\, e^{-(R-r)^2}\right)_{\hat{r}} - \left(\frac{2A}{(z+B)^3}\, e^{-(R-r)^2}\right)_{\hat{z}}\right].$$

(b) Com base nas tuas contas dê a direção e o sentido de $\vec{q}$ para $r < R$ e para $r > R$. $\boxed{5}$

Resposta:
A constante que multiplica a exponencial em $\hat{r}$ muda de sinal em R, portanto o fluxo radial aponta para dentro se $r < R$ e para fora se $r > R$. A componente vertical não muda de sinal, o fluxo é para cima em todo o espaço.

7. Considere o fluxo de Couette entre placas paralelas longas como na figura abaixo: a placa de baixo é fixa e a de cima se move com velocidade V_0. A pressão no fluido entre as placas é da forma $p = A - Bx$ onde A e B são constantes conhecidas. A equação do momentum neste caso é dada por: $-\dfrac{\partial p}{\partial x} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$



(a) Obtenha uma expressão para a velocidade $u(y)$ em termos das constantes A, B, μ, V_0 e h. $\boxed{15}$

Sugestão: calcule o gradiente de pressão, integre Navier–Stokes duas vezes e use as condições de contorno para achar o valor das constantes.

Resposta:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = B \text{ portanto } \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = B \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{B}{\mu}.$$

Integrando duas vezes surgem duas constantes de integração:

$$u = \frac{B}{2\mu}y^2 + Cy + D \quad \text{e para achar o valor de } C \text{ e } D \text{ precisamos das condições de contorno.}$$

Usando o fato que $u = 0$ em $y = 0$ obtemos $D = 0$. Usando o fato que $u = V_0$ em $y = h$ obtemos

$$\frac{B}{2\mu}h^2 + Ch = V_0 \quad C = \frac{V_0}{h} - \frac{Bh}{2\mu} \quad \text{portanto } u = \frac{B}{2\mu}y^2 + \left(\frac{V_0}{h} - \frac{Bh}{2\mu}\right)y$$

(b) Responda qual o formato do perfil de velocidade e quais constantes (maiúsculas) controlam que aspecto geométrico deste perfil. $\boxed{5}$

Resposta:

É uma parábola, sendo que o sinal do gradiente de pressão B controla a concavidade e a relação entre V_0 e B controla a inclinação.

Memória não–volátil:

Regra da cadeia: $f(g(x))' \;=\; f'(g(x))\, g'(x)$.
Trigonometria básica: $\sin(a+b) = sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
Se o ângulo é pequeno, o comprimento do arco é o raio vezes o ângulo.

$$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\cdot d\vec{A} \qquad \int_A \vec{u}\cdot d\vec{A} = \int_v \vec{\nabla}\cdot\vec{u}\, d\vec{V}$$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Gradiente	$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \text{para uma gota esférica.}$$

A vorticidade planetária é $f = 2\Omega\sin(\theta)$ onde $\Omega = 7.27\times10^{-5}$ s^{-1}.
O raio da elipse é

$$r = \frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}}$$

e a área da elipse é $A = \pi ab$.

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$
$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \;=\; \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos	10	10	10	20	20	15	20	105
Nota								