IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:__________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

Violação de uma das regras anulará a prova.

- Desligue e guarde o celular.
- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.

♠

1. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Justifique as incorretas. [10]

   A. Suponha que prendemos um mini-CTD no casco de um barquinho à vela de 30cm e soltamos o barquinho em alto mar. As medidas tomadas por esse instrumento podem ser consideradas Lagrangianas.

   Resposta:
   Errado. O barquinho não segue o fluxo por causa da vela, que reage ao vento e não às correntes.

   B. A dimensão do coeficiente de viscosidade dinâmica μ é [$\mathbf{ML^{-1}T^{-1}}$]

   Resposta:
   Certo

   C. A tensão superficial de uma gota esférica pode ser estimada a partir do equilíbrio entre o trabalho de compressão e a variação da densidade.

   Resposta:
   Errado, é a variação da área.

   D. O rotacional do gradiente da salinidade é sempre zero.

   Resposta:
   Sim, basta fazer a conta para uma componente.

   E. O termo advectivo da derivada total é chamado de não-linear, pois podemos usar o teorema de Stokes para colocar alguns termos na forma $\frac{1}{2}\frac{\partial u_i^2}{\partial x_i}$.

   Resposta:
   Não é o Teorema de Stokes, é a regra da cadeia: errar uma coisa dessas devia dar cadeia.

2. Mostre matematicamente que o tensor deformação contém em si a compressão e o cisalhamento. [5]

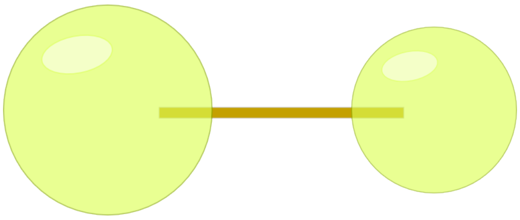
   Resposta:
   Considere $i = j$: $\quad e_{ij} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \;=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$, que representa compressão. Além desses 3 termos, e_{ij} tem outros 6 termos com $i \neq j$, como por exemplo $\frac{\partial v}{\partial x}$ que representam o cisalhamento.

3. Use o que você sabe sobre vorticidade para demonstrar que uma canoa colocada fora do centro de um vórtice irrotacional não gira em torno de si mesma. [5]

   Resposta:
   Só temos $u_\theta = \frac{C}{r}$, as demais componentes e/ou derivadas são nulas, portanto

$$\begin{aligned}\omega_z &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(\frac{C}{r}\right)\right]}{\partial r} = 0.\end{aligned}$$

4. Considere a figura abaixo onde a bolha maior tem r =100mm, a menor tem r =90mm e elas estão unidas por um canudinho fino. A tensão superficial da água em N/m é $\sigma = 75.98 \times 10^{-3} - 1.689 \times 10^{-4}\, T$ sendo T a temperatura em °C. A bolha menor está a 25°C. **Qual a temperatura da bolha maior?** Dica: Para não perder tempo, faça as contas com $\sigma = a - bT$ e só substitua valores numéricos no final. [10]



Resposta:

Resposta:

$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$ se as duas bolhas estão unidas por um canudinho não há diferença de pressão, portanto:

$$\frac{4\sigma_1}{r_1} = \frac{4\sigma_2}{r_2} \text{ ou } \sigma_2 = \frac{r_2}{r_1}\sigma_1.$$

Onde a bolha 1 é a maior e a bolha 2 é a menor. Substituindo a expressão $\sigma = a - bT$ que relaciona tensão à temperatura, temos:

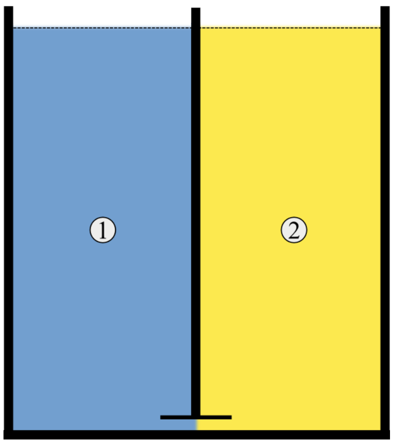
$$a - bT_1 = \frac{r_1}{r_2}(a - bT_2), \text{ isolando } T_1: \quad T_1 = \frac{\frac{r_1}{r_2}(a - bT_2) - a}{-b},$$

substituindo os valores numéricos $T_1 = -22.21$°C.

5. Considere uma cuba de base retangular cuja seção transversal é mostrada na figura abaixo. [10]

A água do lado 1 tem salinidade $S_1 = 35$ e temperatura $T_1 = 25$°C; a água do lado 2 tem temperatura $T_2 = 5$°C. **Determine a salinidade** S_2 sabendo que o coeficiente de expansão térmica é $\alpha = 1.8 \times 10^{-4}$ °C^{-1}, o coeficiente de contração halina é $\beta = 7.6 \times 10^{-4}$psu^{-1} e o coeficiente de compressibilidade $\kappa = 4.5 \times 10^{-5}$bar^{-1}.

- Note que a cuba é vazada no fundo, e que a água dos dois lados tem a mesma altura.
- Pense na pressão dos dois lados.
- Assuma que os coeficientes α, β e κ são constantes, e que $\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha\Delta T + \beta\Delta S + \kappa\Delta p$.



Resposta:

Se a cuba é vazada, a pressão é a mesma dos dois lados do fundo da cuba, $p_2 = p_1 \ \Rightarrow \rho_2 g z_2 = \rho_1 g z_1$. Como a gravidade e a altura são iguais dos dois lados, $\rho_2 = \rho_1$ e $\Delta rho = 0$. Portanto $-\alpha\Delta T + \beta\Delta S + \kappa\Delta p = 0$, mas novamente, a pressão é a mesma dos dois lados do fundo da cuba, $\Delta p = 0$. Ficamos apenas com $-\alpha\Delta T + \beta\Delta S = 0$ ou seja,

$$
\begin{aligned}
-\alpha(T_2 - T_1) + \beta(S_2 - S_1) &= 0 \\
\alpha(T_2 - T_1) &= \beta(S_2 - S_1) \\
S_2 - S_1 &= (T_2 - T_1)\frac{\alpha}{\beta} \\
S_2 &= S_1 + (T_2 - T_1)\frac{\alpha}{\beta} \\
S_2 &= 35 + (5 - 25)\frac{1.8}{7.6} \\
S_2 &= 30.26\text{psu}
\end{aligned}
$$

6. Um flutuador Lagrangeano foi capturado por um vórtice desgarrado da Corrente Norte do Brasil. O vórtice é elíptico, tem semi-eixo maior (zonal) $a = 3 \times 10^5$m e semi-eixo menor (meridional) $b = 2 \times 10^5$m. O semi-eixo zonal está alinhado com o paralelo de 5°N. A velocidade no perímetro do vórtice foi medida pelo flutuador e é descrita por $u = k\,r\,((b\,\cos\theta)^2 + (a\,\sin\theta)^2)$ ao longo de uma trajetória fechada. $k = 1 \times 10^{-16}$ m^{-2}s^{-1}.

   (a) Qual é a **vorticidade média** na área dentro do vórtice? 10

   Resposta:
   Do Teorema de Stokes:

   $$\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{l} = \int_A \left(\vec{\nabla}\times\vec{u}\right)\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{\omega}\cdot d\vec{A},$$

   Considerando-se a área plana, a vorticidade reduz-se à sua componente vertical, portanto pode ser tratada como escalar. O último termo é o produto entre a área total e a vorticidade média, $\int_A \vec{\omega}\cdot d\vec{A} = \overline{\omega}\int_A d\vec{A} = \overline{\omega}.A$. Para calcularmos a vorticidade média dentro do vórtice basta fazermos

   $$\overline{\omega} = \frac{1}{A}\oint_0^{2\pi} \vec{u}\cdot d\vec{l},\ \text{mas}\ d\vec{l} = r d\vec{\theta}\ \text{portanto como}\ u \parallel \theta,\ \overline{\omega} = \frac{1}{A}\oint_0^{2\pi} u\,r\,d\theta.$$

   Substituindo A, u e r:

   $$\overline{\omega} = \frac{1}{\pi ab}\oint_0^{2\pi} k\,\frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}}\,((b\,\cos\theta)^2 + (a\,\sin\theta)^2)\,\frac{ab}{\sqrt{(a\sin\theta)^2 + (b\cos\theta)^2}}\,d\theta$$

   A integral medonha se reduz a:

   $$\overline{\omega} = \frac{1}{\pi ab}\oint_0^{2\pi} k\,(ab)^2\,d\theta = 2kab.$$

   (b) Expresse esse valor como percentual da **vorticidade planetária** local. 5

   Resposta:
   Se as contas estiverem certas, a vorticidade média dá $1,2 \times 10^{-5}$ s^{-1} e a planetária local é $1,255 \times 10^{-5}$ s^{-1}, portanto a vorticidade relativa é 95.62% da planetária.

7. Um acidente com um cargueiro levou ao vazamento de etileno-glicol (anticongelante) perto de Abrolhos, num local onde as correntes são aproximadamente nulas e a profundidade é de 105 m. Amostras de água

foram coletadas em z =100, 50, 20, 10 e 1 m. Nelas foram encontradas concentrações de C =0.200, 0.275, 0.296, 0.299 e 0.300 g.m^{-3}. Assuma que o quadro é estacionário. Sabendo que o coeficiente de difusão dessa substância é $k = 2 \times 10^{-6}$m^2.s^{-1},

(a) Baseado nos valores de $q(z)$ para z = 75, 35, 15 e 5,5 m, diga se o fluxo aumenta ou diminui com a profundidade. $\boxed{10}$

Resposta:
Use a fórmula da difusão de Fick: $\vec{q} = -k\vec{\nabla}C$. O problema é unidimensional, portanto $q = -k\frac{dC}{dz}$. Podemos aproximar esse cálculo pelas diferenças finitas $q = -k\frac{\Delta C}{\Delta z}$ e fazendo as contas obteremos $q(75, 35, 15, 5.5) = (0.30, 0.14, 0.06, 0.02) \times 10^{-11}$ kg.m^{-2}.s^{-1}, portanto fluxo aumenta com z.

(b) Obtenha uma fórmula analítica para $C(z)$ para qualquer z assumindo que o gradiente é contínuo e suave. Dica: pense no gradiente em função de z e assuma que $\frac{dC}{dz} = 0$ em $z = 0$. $\boxed{10}$

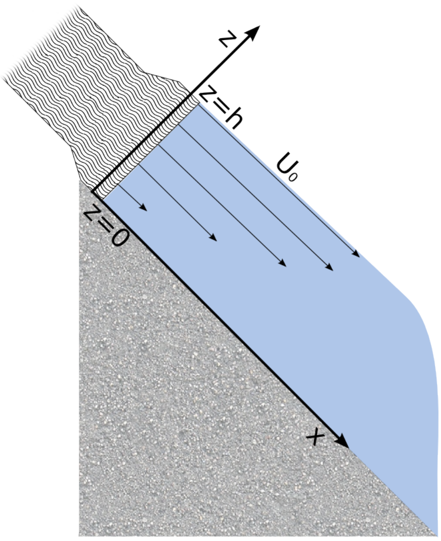
Resposta:
$\frac{\Delta C}{\Delta z}$ = (-0.0015, -0.0007, -0.0003, -0.0001) para z = (75, 35, 15, 5.5), o gradiente é uma reta que passa pela origem. Vamos chamar o gradiente de G. O coeficiente angular m da reta é $\frac{\Delta G}{\Delta z}$. Usando quaisquer dois pontos obtemos $m = -2 \times 10^{-5}$. Para obtermos a concentração basta integrar essa reta em z:

$$C(z) = \int \frac{dC(z)}{dz} dz = C_0 + m.\frac{1}{2}z^2,$$

onde C_0 é uma constante que se pode determinar usando, por exemplo, $C(1m) = 0.300$. Fazendo as contas obtemos $C_0 = 0.300 - 10^{-5} \simeq 0.300$, portanto a fórmula é

$$C(z) = 0.300 - 1 \times 10^{-5}\, z^2.$$

8. Na seção xz ilustrada a seguir, um canal despeja um líquido de densidade ρ e viscosidade dinâmica μ sobre um barranco na forma um triângulo retângulo isósceles. O ângulo superior do triângulo é θ. Depois de um certo tempo, o sistema fica em equilíbrio, as velocidades u e a altura h não variam mais com o tempo. Esse fluxo laminar e viscoso é forçado apenas pela gravidade g. O fluxo é simétrico em y. Considere uma parcela de fluido longe das bordas, com comprimento L na direção x e W na direção y (furando o papel). Junto ao chão do barranco a velocidade é $u = 0$ e na interface superior é $u = U_0$.



Vamos aplicar o que deduziremos para ver se escorre mais água se aquecermos ou se resfriarmos a água, mantendo U_0 constante. O fluxo é ajustado de forma que temos $U_0 = 2$ m/s se $g = 9.8$ms^{-2}. Sabemos também que tanto a viscosidade como a densidade mudam com a temperatura: $\mu = 1.8 \times 10^{-3}$ Nsm^{-2} e $\rho = 999.9$kgm^{-3} a 1°C e $\mu = 0.3 \times 10^{-3}$Nsm^{-2} e $\rho = 970.4$kgm^{-3} a 90°C.

Sugestão: Lembre que τ é força por área. Comece obtendo τ em função de z para uma parcela de fluido que desce o *plano inclinado*. Você deve usar a definição de τ para obter uma equação diferencial, resolva-a para obter u, h e uma boa dose de satisfação.

(a) Obtenha o **perfil de velocidades** $u(z)$. $\boxed{10}$

Resposta:

$$\tau = \frac{F}{A} \;=\; \frac{\rho V g \cos\theta}{LW} \;=\; \rho z g\, cos\theta$$

$$\tau_{ij} = \mu\frac{du_j}{dx_i} \;\Rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial z} \;=\; \frac{\rho}{\mu} g z \,\cos\theta \quad \text{integrando em } z \text{ dos 2 lados}$$

$$u = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\theta\, z^2 + C \quad \text{, usando as condições de contorno, se } u = 0 \text{ em } z = 0 \;\Rightarrow\; C = 0;$$

$$\text{Portanto o perfil é } u(z) = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\theta\, z^2$$

Resposta:

(b) Obtenha uma fórmula para a **altura de equilíbrio** h em função dos parâmetros conhecidos. $\boxed{5}$

Resposta:

Usando a outra condição, $u = U_0$ em $z = h \;\Rightarrow\; U_0 = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\theta\, h^2$ portanto $h = \sqrt{\frac{2\mu U_0}{\rho g \cos\theta}}$.

(c) **Qual o fluxo** em m^3/s que passa por $W = 10$cm se o fluido está a 1°C? e a 90°C? $\boxed{10}$

Resposta:

Para calcular o fluxo Q, podemos calcular a velocidade média $\bar{u}$ e multiplicar pela área Wh.

$$\bar{u} = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\theta\,\frac{1}{h}\int_0^h z^2 dz = \frac{\rho g\, h^2}{6\mu}\cos\theta \qquad Q = \bar{u}hW \;=\; \sqrt{\frac{2\mu U_0^3}{9\rho g \cos\theta}}\,W$$

Substituindo os valores para 1°C temos $Q = 6.8\times10^{-5}$m^3/s e para 90°C temos $Q = 2.8\times10^{-5}$m^3/s.

Memória não–volátil:

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Gradiente	$\vec{\nabla} E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente	$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional	$\vec{\nabla} \times \vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

Se o ângulo é pequeno, o comprimento do arco é o raio vezes o ângulo.

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r} \text{para uma gota esférica.}$$

A vorticidade planetária é $f = 2\Omega \sin(\theta)$ onde $\Omega = 7.27 \times 10^{-5}$ s^{-1}.
O raio da elipse é

$$r = \frac{ab}{\sqrt{(a \sin\theta)^2 + (b \cos\theta)^2}}$$

e a área da elipse é $A = \pi ab$.

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	10	5	5	10	10	15	20	25	100
Nota									