IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto), celular não pode.
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará a tua prova.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Justifique as incorretas. $\boxed{10}$

   A. O que determina se linhas de corrente, trajetórias e linhas de partículas são coincidentes é a divergência, portanto em fluxos incompressíveis as três linhas são coincidentes.

   Resposta:
   Errado, é a estacionariedade.

   B. O operador divergente reduz a ordem de um tensor.

   Resposta:
   Certo.

   C. O aumento do nível do mar é causado, em parte, pelo aumento da temperatura e da salinidade médias dos oceanos.

   Resposta:
   Errado. Se a salinidade aumentasse o nível diminuiria.

   D. Um flutuador Lagrangeano possui uma vela invertida, que fica dentro d'água no intuito de mantê-lo na mesma parcela de fluido.

   Resposta:
   Certo.

   E. A capacidade térmica dos dos primeiros ∼2,5m dos oceanos é equivalente à de 20km de atmosfera. Isto se deve ao fato que o calor específico da água (C_v) é muito maior que o do ar.

   Resposta:
   Errado. Embora a afirmação da primeira frase esteja certa, a diferença de densidade domina, é de um fator de 1000 contra um fator de 4 por causa do C_v.

2. (a) Escreva o tensor $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ em termos de u, v, w, x, y, z. $\boxed{2}$

   Resposta:
   $$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

   (b) Escreva a soma das componentes diagonais na forma de um operador vetorial. $\boxed{2}$

   Resposta:
   $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u};$$

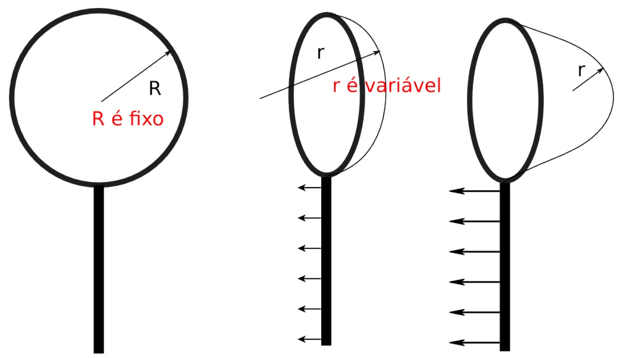
   (c) O que representam fisicamente as componentes diagonais individualmente e somadas? $\boxed{3}$

Resposta:
Individualmente, a deformação linear; somadas, a divergência da velocidade.

(d) O que representam fisicamente as componentes não-diagonais? 3

Resposta:
O cisalhamento.

3. O aro para fazer bolhas de sabão tem raio R e, ao movê-lo, forçamos a entrada de ar contra a membrana de água e sabão gerando uma pequena pressão dinâmica. Essa pressão curva a superfície saponácea reduzindo seu raio de curvatura r que inicialmente é ∞. Pensando *à la Bernoulli* podemos aproximar essa pressão dinâmica como $p_d = \frac{1}{2}\rho u^2$ onde ρ é a densidade **do ar** e u a velocidade projetada na direção perpendicular à área do aro. Obtenha uma expressão para a velocidade que produz uma bolha com r=R. 10



Resposta:

Queremos uma situação de equilíbrio onde $r = R$. Assim sendo a pressão dinâmica para dentro do aro deve se igualar à pressão por causa da tensão superficial para fora do aro, ou seja:

$$\frac{\rho u^2}{2} = 2\sigma R \qquad u = \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho R}}$$

4. Considere uma superfície A que envolve um volume V. Para que a temperatura T se conserve, a taxa de aumento de temperatura dentro de V tem de ser igual ao fluxo de temperatura para dentro da área A, ou seja: 10

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV = -\int_A T\vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

Considere a temperatura como uma propriedade conservativa neste sistema. A partir da equação acima obtenha a equação ao lado e responda: qual a interpretação física do primeiroo termo?

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) = 0$$

Resposta:

Usando Gauss $\int_A (T\vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) dV$, obtemos $\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) d\vec{V} = 0.$

Agrupando, temos $\int_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) \right) d\vec{V} = 0$

Para que o integrando da última expressão se anule para qualquer V é necessário que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) = 0 \ .$$

O primeiro termo é a variação local de temperatura (em K/s) dentro de V (e.g. por compressão ou por insolação).

5. Considere o campo de temperatura da superfície do mar (TSM) descrito por $T(x, y, z, t) = T_0 + A\sin(kx + ly + \omega t)$, numa região de $10° \times 10°$ centrada em 20°W sobre o trópico de Capricórnio. Nessa região a velocidade da corrente a $z = 0$m é dada por $\vec{V} = B\cos(kx + ly + \omega t)_{\hat{j}}$. Obtenha uma expressão para a derivada material (ou total) $\frac{DT}{Dt}$ da TSM.

T_0 = 25°C
A =1°C
B =0.2 m.s^{-1}
k =1 °$^{-1}$
l =0.3 °$^{-1}$C
ω =$2\pi/365\,d^{-1}$

   (a) Dada a fórmula da TSM, quanto tempo decorre entre duas TSMs máximas consecutivas? $\boxed{5}$

   (b) Dada a fórmula de $\vec{V}$, quanto tempo decorre entre duas velocidades meridionais máximas consecutivas? $\boxed{5}$

   (c) Quanto tempo decorre entre dois máximos consecutivos da componente advectiva da variação da TSM? $\boxed{10}$

Resposta:

Basta olhar para quem multiplica t em T e V para responder (a) e (b): 365 dias. é uma variação anual. Para responder (c) lembre disto:

$$\frac{DT}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{comp.\ local} + \underbrace{u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + w\frac{\partial T}{\partial z}}_{comp.\ advectiva}.$$

Como $u = w = 0$ as contas são simples. Basta derivar T em relação a t e y para obter

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{2\pi}{365}\cos(x + \frac{1}{3}y + \frac{2\pi}{365}t) + \frac{1}{15}\cos(x + \frac{1}{3}y + \frac{2\pi}{365}t)^2.$$

O importante nessa questão é perceber que $\frac{DT}{Dt}$ tem um cosseno ao quadrado, portanto ele sobe e desce a cada 182,5 dias

6. Prove que um vórtice 2D, circular, de Rankine, girando com velocidade angular Ω tem vorticidade constante na parte interna e zero na parte externa. A velocidade tangencial u_θ é máxima em $r = R$. $\boxed{15}$

Resposta:

Para $r < R$ temos $u_{\theta i}$ em rotação de corpo sólido e para $r > R$ temos $u_{\theta e}$ em movimento irrotacional. Sobre $r = R$ os dois regimes resultam na mesma velocidade tangencial, portanto:

$$u_{\theta i} = \Omega r \quad u_{\theta e} = \frac{A}{r} \quad \text{e, para achar } A \text{ basta fazer } r = R \text{ em } u_{\theta e} = u_{\theta i} \quad \Omega R = \frac{A}{R} \quad A = \Omega R^2$$

A vorticidade é dada pelo rotacional da velocidade horizontal (coords. cilíndricas) :

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z} \quad \text{mas } u_r = 0 \quad \text{portanto sobra só} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(r\,u_\theta)}{\partial r}$$

Dessa forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(r \le R) = \vec{\nabla} \times \vec{u_{\theta i}} = \frac{1}{r}\frac{\partial(\Omega r^2)}{\partial r} = \frac{1}{r}\Omega 2r = 2\Omega$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(r \ge R) = \vec{\nabla} \times \vec{u_{\theta e}} = \frac{1}{r}\frac{\partial(\Omega R^2)}{\partial r} = 0$$

7. Considere que a boca de uma pluma hidrotérmica é aproximadamente circular e que a concentração $C[CuSO_4]$ é máxima na borda do círculo de raio D. **20**

Dados *in situ* mostram que essa concentração C decai (a) com o inverso do quadrado da distância do fundo[1] e (b) exponencialmente com a distância da borda da pluma.

Posto isso, um bom modelo da concentração de sulfato de cobre $C[CuSO_4]$ é dado por:

$$C = \frac{A}{(z+B)^2}\, e^{-(D-r)^2}.$$

Nesse modelo D é o raio da boca, $B = |z(fundo)| + 1$ e A é a concentração máxima, tudo em unidades do SI.

Use o modelo de difusão de Fick para obter o vetor fluxo de massa ($\vec{q}$) de $CuSO_4$, dado o coeficiente de difusão k. Com base nas tuas contas dê a direção e o sentido de $\vec{q}$ para $r < D$ e para $r > D$.

Resposta:

Fick nos diz que $\vec{q} = -k\vec{\nabla}C$. Olhe a definição de gradiente em coordenadas cilíndricas. Como $C = C(r,z)$ a derivada em θ é zero. A componente radial é dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial r}\hat{r} = \frac{A}{(z+B)^2}\frac{\partial(e^{-(D-r)^2})}{\partial r} = \frac{2A(C-r)}{(z+B)^2}\, e^{-(D-r)^2}.$$

A componente vertical é dada por:

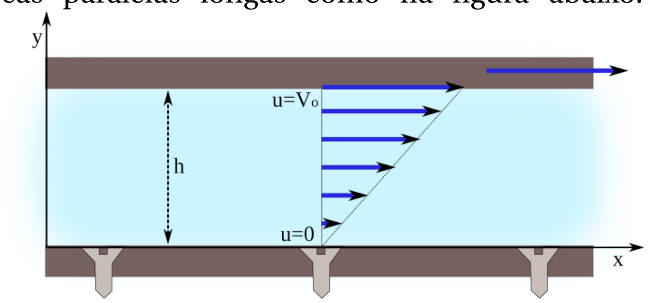
$$\frac{\partial C}{\partial z}\hat{z} = \frac{\partial\left(\frac{A}{(z+B)^2}\right)}{\partial z}\, e^{-(D-r)^2} = -\frac{2A}{(z+B)^3}\, e^{-(D-r)^2}.$$

Portanto aplicando Fick obterás:

$$\vec{q} = -k\left[\left(\frac{2A(C-r)}{(z+B)^2}\, e^{-(D-r)^2}\right)_{\hat{r}} - \left(\frac{2A}{(z+B)^3}\, e^{-(D-r)^2}\right)_{\hat{z}}\right].$$

Do enunciado, a constante que multiplica as exponencial em $\hat{r}$ muda de sinal em D, portanto o fluxo radial aponta para dentro se $r < D$ e para fora se $r > D$. A componente vertical não muda de sinal, o fluxo é para cima em todo o espaço.

8. Considere o fluxo de Couette entre placas paralelas longas como na figura abaixo: **20**



A pressão é da forma $p = -Ax$ onde A é uma constante conhecida. A equação do momentum neste caso é dada por:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Obtenha uma expressão para a velocidade $u(y)$ em termos das constantes A, μ, V_0 e h. Responda qual o formato do perfil de velocidade e quais variáveis controlam o formato deste perfil.

[1] z é orientado para cima, $z = 0$ na superfície, portanto $z < 0$ abaixo dela.

Resposta:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = A \text{ portanto } \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{A}{\mu}.$$

Integrando duas vezes surgem duas constantes de integração:

$u = \dfrac{A}{2\mu}y^2 + By + C$ e para achar o valor de B e C precisamos das condições de contorno.

Usando o fato que $u = 0$ em $y = 0$ obtemos $C = 0$. Usando o fato que $u = V_0$ em $y = h$ obtemos

$$\frac{A}{2\mu}h^2 + Bh = V_0 \quad B = \frac{V_0}{h} - \frac{Ah}{2\mu} \quad \text{portanto}$$

$$u = \frac{A}{2\mu}y^2 + \left(\frac{V_0}{h} - \frac{Ah}{2\mu}\right) y$$

É uma parábola, sendo que o sinal do gradiente de pressão A controla a concavidade e a relação entre V_0 e A controla a inclinação.

Memória não–volátil:

A densidade da água pura é 1000 kg.m^{-3}. A do ar é 1 kg.m^{-3}.
O coeficiente de tensão superficial da água é 83×10^{-3}N.m^{-1}.
O coeficiente de expansão térmica da água é 4×10^{-5}K^{-1}. O de contração halina é 7.9×10^{-4}psu^{-1}.
O calor específico a volume constante da água é 4 J.g^{-1}K^{-1}. O do ar é 1 J.g^{-1}K^{-1}.

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_{T,S} dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{p,S} dT + \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_{p,T} dS$$

A lei de Fourier é $\vec{q_t} = -k_t\vec{\nabla}T$ onde k_t é o coeficiente positivo de condutividade térmica.

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar						
Gradiente é vetor!	$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
Divergente é escalar!	$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
Rotacional é vetor!	$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\hat{i}_z}$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	10	10	10	10	20	15	20	20	115
Nota									