IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto), celular não pode.
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará a tua prova.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. Dê as dimensões (M=massa, L=distância, T=tempo e Θ=temperatura).
   (a) A dimensão de potência é: 1

   Resposta:
   $[ML^2T^{-3}]$

   (b) A dimensão de torque é: 1

   Resposta:
   $[ML^2T^{-2}]$

   (c) A dimensão de frequência angular é: 1

   Resposta:
   $[T^{-1}]$

   (d) A dimensão de viscosidade cinemática é: 1

   Resposta:
   $[L^2T^{-1}]$

   (e) A dimensão de taxa de deformação volumétrica é: 1

   Resposta:
   $[T^{-1}]$

2. Expresse que o tensor vorticidade $\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ em notação vetorial com todas as derivadas parciais. 10

Resposta:
Usando a regra acima, o desenvolvimento fica assim:

$$\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \begin{cases} ijk = 123 & \rightarrow \quad 1 \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} + \\ ijk = 132 & \rightarrow \quad -1 \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \\ ijk = 213 & \rightarrow \quad -1 \quad \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} + \\ ijk = 231 & \rightarrow \quad 1 \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \\ ijk = 312 & \rightarrow \quad 1 \quad \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \\ ijk = 321 & \rightarrow \quad -1 \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{cases}$$

Quaisquer outras combinações de ijk tem 2 números repetidos e são iguais a zero, dada a definição de ϵ_{ijk}. Agrupando–se as parcelas acima em i e trocando (u_1, u_2, u_3) por (u, v, w) e (x_1, x_2, x_3) por (x, y, z) fica mais fácil reconhecer o rotacional em sua notação vetorial usual:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{\vec{i}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\vec{j}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\vec{k}}$$

3. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Uma errada anula uma certa. $\boxed{10}$

   A. A principal diferença entre um fluido e um sólido é que o fluido se deforma continuamente pela ação de uma força e o sólido não. Gases são uma exceção pois essa mesma força causa compressão.

   B. Considere um fluxo $\vec{q} = q_{\hat{i}} + q_{\hat{j}}$ onde $q_{\hat{i}} = A\sin(kx - \omega t + \phi_1 t)$ e $q_{\hat{j}} = B\cos(mx - 2\omega t + \phi_2 t)$, com A, B, k, m, ω, ϕ_1 e ϕ_2 constantes. Para que as linhas de corrente e as trajetórias coincidam basta que $\omega = 0$.

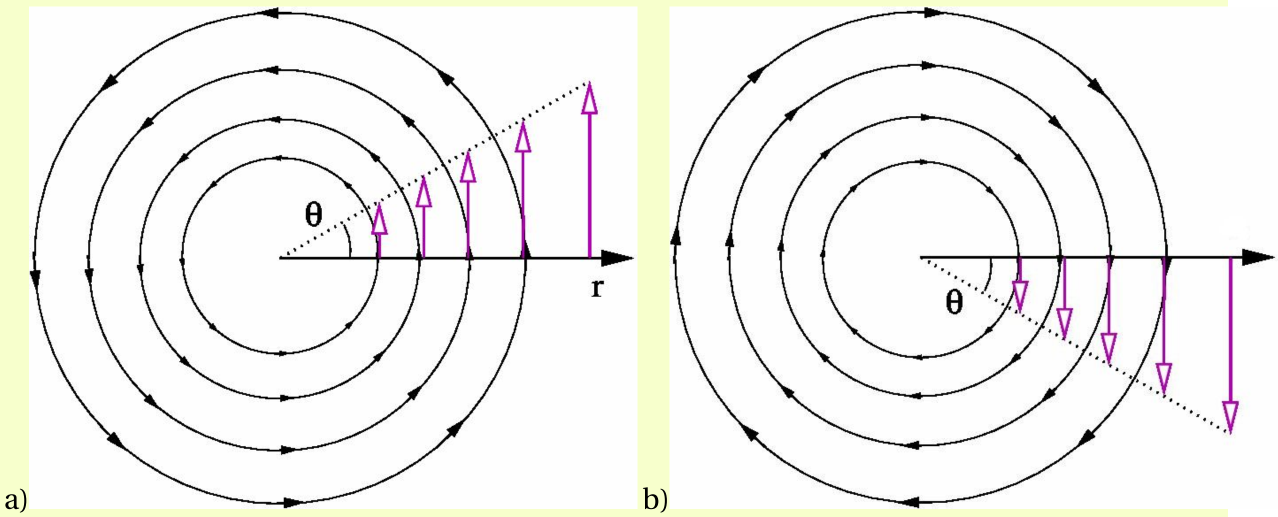
   C. O aumento de densidade causado pela adição de sal se deve ao fato que o sal (NaCl) possui propriedades eletroquímicas que aproximam, em média, as moléculas de água.

   D. A tensão superficial dá origem a uma força paralela à interface, cujo valor depende do aumento da área desta interface.

   E. Para aquecermos 1 kg de água gastamos 4000 vezes mais calorias que para aquecer uma quantidade igual de ar. Isso ocorre principalmente porque a densidade da água é 1000 vezes maior que a do ar. O calor específico da água é apenas 4 vezes maior que o do ar.

4. Esboce as linhas de corrente para um vórtice em rotação de corpo sólido com vorticidade Ω em relação a um sistema de referência (a) parado em relação ao campo distante e (b) girando com velocidade angular 2Ω cuja origem está no centro do vórtice. $\boxed{10}$

Resposta:



5. A aranha pescadora (*Dolomedes tenebrosus*) anda sobre a água pois causa uma pequena deformação na superfície da água, com raio de curvatura de 5 mm e abrange uma área circular do mesmo raio. A aranha se alimenta e o raio de curvatura aumenta para 6 mm. Qual o ganho de massa em gramas? $\boxed{10}$

Resposta:

A diferença de pressão por causa da tensão superficial é $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ e a força total em uma perna é $F_t = \Delta p A$. Essa força tem de equilibrar um oitavo do peso da aranha, portanto $F_t = \frac{mg}{8}$, a massa é $m = \frac{16\sigma\pi r^2}{gr}$ e substituindo os valores dados no primeiro caso menos o do segundo caso dá uma diferença é 0,182 g, porque comeu mosca!

6. O aumento do nível dos oceanos tem sido utilizado como indicador de mudanças climáticas. O coeficiente de contração halina é dado por: 7.3×10^{-4}. Considere que na equação acima a pressão e a temperatura são constantes, que o oceano tem bordas verticais, profundidade média de 5000m e que ele tem massa constante. Se a salinidade média do oceano global diminuir 0.01 por ano, em quanto tempo o nível médio do mar aumentará de 1 metro? Explique as aproximações utilizadas. Dica: Pense em termos de colunas d'água. $\boxed{15}$

Resposta:

Considere uma coluna d'água de área A e altura h que se expande até $h+\eta$ pois a densidade mudou de ρ_1 para $\rho_2 < \rho_1$ Por conservação de massa:

$$Ah\rho_1 = A(h+\eta)\rho_2$$

$$\rho_1 h = \rho_2 h + \rho_2 \eta$$

$$\eta = \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2} \simeq -h\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Pois a densidade não vai mudar muito, portanto $\rho_2 \simeq \rho$. Defini $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ e $\rho = (\rho_2 + \rho_1)/2$.

Aproximando $\beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial S})_{pT}$ para diferenças finitas pois queremos valores médios,

$\beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\Delta\rho}{\Delta S})$. Isolando $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ e substituindo na expressão de η , temos $\eta = -h\beta\Delta S$

Substituindo os valore numéricos,

$$\eta = -5 \times 10^3 \ \times \ 7.3 \times 10^{-4} \ \times \ -0.01 = 0.0365$$

Este é o aumento anual de nível, para chegar a 1 m basta inverter esse número, o que dá 27.397 anos, ou 27 anos, 144 dias, 21 horas e 50 minutos.

7. Considere um processo adiabático onde vale $\int_V \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u})dV = \int_A (T\vec{u}) \cdot d\vec{A}$

   (a) É verdade que $\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u})$ se anula? (1) $\boxed{5}$

   Responda sim ou não e justifique em palavras a sua resposta.

   Resposta:
   Sim, por causa do teorema de Gauss.

   (b) Considere uma região estável do oceano onde a velocidade $\vec{U}$ e a temperatura T inicial são dadas por: $\boxed{10}$

$$T(x,y,z,t=0) = T_0 + Cz \quad (2)$$

$$\vec{U}(x,y,z,t) = A\cos(kz+\phi_1)_{\hat{i}} + 0_{\hat{j}} + B\sin(kx+\phi_2)_{\hat{k}} \quad (3)$$

   Onde A, B, C, T_0, k, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes e $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ são versores tri–ortogonais. Obtenha uma expressão matemática para a taxa de variação de temperatura substituindo T apenas no termo advectivo da expressão 1.

Resposta:
O termo advectivo é o segundo:

$$\vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial x}(T_0 + Cz)(A\cos(kz + \phi_1)) - \frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial x}(T_0 + Cz)(B\sin(kx + \phi_2))$$

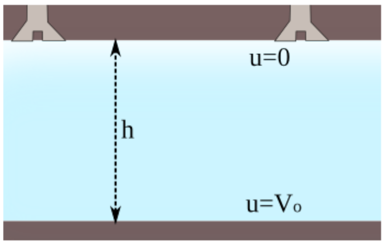
Note que a derivada em x se anula, restando como resposta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -BC\sin(kx + \phi_2).$$

(c) Para descrever em palavras o resultado dessa perturbação no campo de temperatura, complete a sentença: A componente __________ da corrente perturbou o campo __________ constante de temperatura, formando sucessivos __________ e __________ orientados __________. $\boxed{5}$

Resposta:
Vertical, horizontalmente, máximos, mínimos, meridionalmente.

8. Considere o fluxo de Couette da figura a seguir, sabendo que a viscosidade dinâmica e a densidade são constantes. Note que na figura u se refere à velocidade das placas. Resolva a equação da conservação de momentum usando as condições de contorno dadas e dê a fórmula do perfil de velocidades e da tensão de cisalhamento em função das variáveis conhecidas. $\boxed{20}$



Resposta:

Seja x o eixo horizontal e y o vertical. A tensão de cisalhamento é τ e a viscosidade é μ. Podemos resolver esta equação diferencial ordinária por integração sendo c uma constante de integração. Assim:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{du}{dy}, \qquad \int \frac{\tau}{\mu} dy = \int \frac{du}{dy} dy + c \qquad \frac{\tau}{\mu} y = u(y) + c, \qquad u(y) + c = \frac{\tau}{\mu} y$$

Usando a condição de contorno de que junto às placas o fluido não escorrega (no-slip), temos:

$$u = 0 \ @ \ y = h \qquad u(h) + c = \frac{\tau}{\mu} h \qquad + c = \frac{\tau}{\mu} h$$

Portanto o perfil é $u(y) = \frac{\tau}{\mu}(y - h)$, mas precisamos determinar μ:

$$u = V_o \ @ \ y = 0, \qquad u(0) = \frac{\tau}{\mu}(y - h) \qquad V_0 = -\frac{\tau}{\mu} h \qquad \tau = -\frac{V_0}{\mu} h$$

aplicando na equação anterior,

$$u(y) = \frac{V_o}{h}(h - y). \text{ Oh yeah!}$$

Isto é para ajudar:
Em coordenadas cilíndricas, para $\vec{V} = (u_r, u_\theta, u_Z)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\vec{i_r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\vec{i_\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\vec{i_z}}.$$

Coeficientes de expansão térmica e contração halina:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_{pS} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial S})_{pT}.$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312, \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132. \end{cases}$$

A tensão superficial σ da água pura é de 71×10^{-3}Nm^{-1}.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	5	10	10	10	10	15	20	20	100
Nota									