IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:______________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto), celular não pode.
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará a tua prova.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

♠

1. Dê as dimensões (M=massa, L=distância, T=tempo e Θ=temperatura).

   (a) A dimensão de energia é: $\boxed{1}$

   Resposta:
   $[ML^2T^{-2}]$

   (b) A dimensão de torque é: $\boxed{1}$

   Resposta:
   $[ML^2T^{-2}]$

   (c) A dimensão de tensão de cisalhamento é: $\boxed{1}$

   Resposta:
   $[ML^{-1}T^{-2}]$

   (d) A dimensão de viscosidade dinâmica é: $\boxed{1}$

   Resposta:
   $[ML^{-1}T^{-1}]$

   (e) A dimensão de calor específico é: $\boxed{1}$

   Resposta:
   $[L^2T^{-2}\Theta^{-1}]$

2. Considerando o tensor $e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, dê a expressão matemática e responda o que representam fisicamente as componentes diagonais e não–diagonais. $\boxed{5}$

   Resposta:
   As componentes diagonais são da forma $i = j$, i.e.:$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ e representam a deformação linear. Somadas resultam no operador divergente. As componentes não–diagonais são da forma $i \neq j$ e.g.:$\frac{\partial u}{\partial y}$ e representam a deformação por cisalhamento. Elas não estão associadas a nenhum operador vetorial.

3. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Uma errada anula uma certa. $\boxed{10}$

   A. A derivada total da temperatura T é dada por:

   $$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

   B. Considere um fluxo $\vec{q} = q_{\hat{i}} + q_{\hat{j}}$ onde $q_{\hat{i}} = A\sin(kx - \omega t + \phi_1)$ e $q_{\hat{j}} = B\cos(mx - 2\omega t + \phi_2)$, com A, B, k, m, ω, ϕ_1 e ϕ_2 constantes. Para que as linhas de corrente e as trajetórias coincidam basta que $\omega = 0$.

   C. O aumento de densidade causado pela adição de sal se deve ao fato que o sal (NaCl) é uma substância 2,16 vezes mais densa que a água.

D. Considere um copo d'água com um canudinho de plástico dentro. A tensão superficial na interface ar–água eleva a água dentro do canudinho.

E. Para aquecermos um volume de 1 m^3 de água gastamos 4000 vezes mais calorias que para aquecer igual volume de ar. Isso ocorre principalmente porque a densidade da água é 1000 vezes maior que a do ar. O calor específico da água é apenas 4 vezes maior que o do ar.

4. Mostre que uma parcela de água fora do centro de um vórtice irrotacional não gira em torno de si mesma. Use o sistema de referência que está parado em relação ao fluxo longe do vórtice. 10

Resposta:

Basta mostrar que a vorticidade se anula, i.e. que o rotacional da velocidade é zero. Só temos $u_\theta = \frac{C}{r}$, as demais componentes e/ou derivadas são nulas, portanto:

$$\begin{aligned}\omega_z &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial\left[r\left(\frac{C}{r}\right)\right]}{\partial r} = 0 \quad \text{fora da origem.}\end{aligned}$$

5. O aumento do nível dos oceanos tem sido utilizado como indicador de mudanças climáticas. O coeficiente de contração halina é dado por: 7.3×10^{-4}. Considere que na equação acima a pressão e a temperatura são constantes, que o oceano tem bordas verticais, profundidade média de 5000m e que ele tem massa constante. De quanto a salinidade média do oceano tem de variar para que o nível médio suba 1 metro? Explique as aproximações utilizadas. Dica: Pense em termos de colunas d'água. 15

Resposta:

Considere uma coluna d'água de área A e altura h que se expande até $h + \eta$ pois a densidade mudou de ρ_1 para $\rho_2 < \rho_1$ Por conservação de massa:

$$Ah\rho_1 = A(h+\eta)\rho_2$$

$$\rho_1 h = \rho_2 h + \rho_2 \eta$$

$$\eta = \frac{h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2} \simeq -h\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

Pois a densidade não vai mudar muito, portanto $\rho_2 \simeq \rho$. Defini $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ e $\rho = (\rho_2 + \rho_1)/2$.

Aproximando $\beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial\rho}{\partial S})_{pT}$ para diferenças finitas pois queremos valores médios,

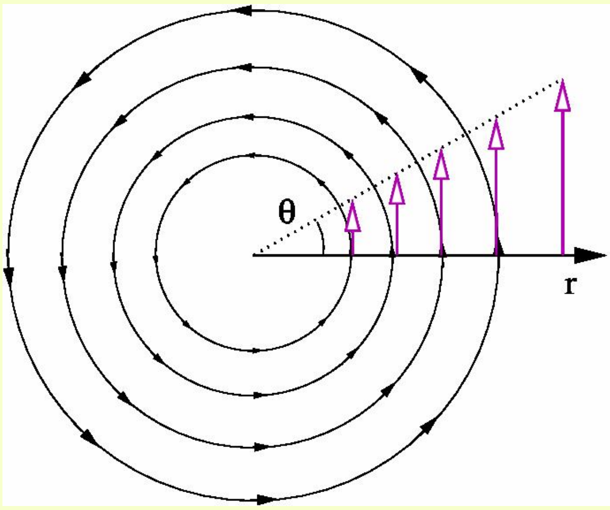
$\beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\Delta\rho}{\Delta S})$. Isolando $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ e substituindo na expressão de η , temos $\eta = -h\beta\Delta S$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{\eta}{-h\beta} = \frac{1}{-5\times 10^3 \;\times\; 7.3\times 10^{-4}} = -0.27$$

Ou seja, basta que a salinidade média em todo o oceano global que é de 35 caia de apenas 0.27 unidades para que o nível suba de um metro. Pouquinho né?!

6. Esboce as linhas de corrente para um vórtice em rotação de corpo sólido com vorticidade Ω em relação a um sistema de referência (a) parado em relação ao campo distante e (b) girando com velocidade angular $\Omega/2$ cuja origem está no centro do vórtice. $\boxed{10}$

Resposta:



a)

Nada a desenhar aqui.

b)

7. A partir de

$$\int_A (S\vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (S\vec{u}) dV \text{ é possível chegar a } \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (S\vec{u}) = 0.$$

(a) O que garante a veracidade da afirmação acima? $\boxed{5}$

Resposta:
O teorema de Gauss.

(b) Considere uma região do oceano onde a velocidade $\vec{U}$ e a salinidade S inicial são dadas por: $\boxed{10}$

$$\vec{U}(x,y,z,t) = A\cos(kz+\phi_1)_{\hat{i}} + 0_{\hat{j}} + B\sin(kx+\phi_2)_{\hat{k}} \quad (1)$$
$$S(x,y,z,t=0) = S_0 + Cz \quad (2)$$

A, B, C, S_0, k, ϕ_1 e ϕ_2 são constantes e $(\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ são versores tri–ortogonais.

Obtenha uma expressão matemática para a taxa de variação da salinidade substituindo S apenas no termo advectivo da equação da conservação de salinidade.

Resposta:
O termo advectivo é o segundo:

$$\vec{\nabla} \cdot (S\vec{u}) = -\frac{\partial}{\partial x}(S_0 + Cz)(A\cos(kz+\phi_1)) - \frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial x}(S_0 + Cz)(B\sin(kx+\phi_2))$$

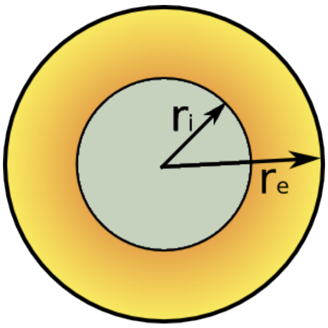
Note que a derivada em x se anula, restando como resposta:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -BC\sin(kx+\phi_2).$$

(c) Para descrever em palavras o resultado dessa perturbação no campo de salinidade, complete a sentença: A componente ____________ da corrente perturbou o campo ________________ constante de salinidade, formando sucessivos ____________ e ____________ orientados ____________________. 5

Resposta:
Vertical, horizontalmente, máximos, mínimos, meridionalmente.

8. Considere dois cilindros vistos de cima na figura abaixo. O interno, de raio r_i está parado e o externo, de raio r_e se move no sentido anti–horário com velocidade angular Ω. Considere o fluxo laminar e o coeficiente de viscosidade dinâmica μ constante. Assuma a condição de contorno de não–escorregamento junto às paredes do cilindro. Esta é a versão mais simples desse problema que já foi tratado por:



- Newton,
- Taylor,
- Stokes,
- Couette,
- Chandrasekar e outros notáveis. Agora é a sua vez.

(a) Obtenha o perfil de velocidades $u_\theta(r)$ em função das variáveis conhecidas. 10

Resposta:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{du_\theta}{dr} \quad \text{integrando dos 2 lados} \quad \frac{\tau}{\mu} r = u_\theta + C \quad \text{ou} \quad u_\theta = \frac{\tau}{\mu} r + C$$

Usando a condição de contorno interna:

$$u_\theta = 0 \text{ em } r = r_i \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\tau}{\mu} r + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\tau}{\mu} r_i$$

Usando a condição de contorno externa e substituindo C:

$$u_\theta = \Omega r_e \text{ em } r = r_e \quad \Rightarrow \quad \Omega r_e = \frac{\tau}{\mu}(r_e - r_i) \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad u_\theta = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i}(r - r_i).$$

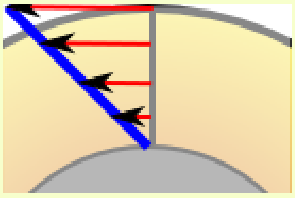
(b) Obtenha a tensão de cisalhamento em qualquer ponto do fluido em função das variáveis conhecidas. 5

Resposta:
Da condição de contorno externa:

$$\frac{\tau}{\mu} = \frac{\Omega r_e}{r_e - r_i} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{\mu \Omega r_e}{r_e - r_i}$$

(c) Esboçe o perfil de velocidades. 10

Resposta:



Estas fórmulas podem ajudar:
Em coordenadas cilíndricas, para $\vec{V} = (u_r, u_\theta, u_Z)$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\vec{i_r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\vec{i_\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)_{\vec{i_z}}.$$

Coeficientes de expansão térmica e contração halina:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial T})_{pS} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial \rho}{\partial S})_{pT}.$$

♠

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	5	5	10	10	15	10	20	25	100
Nota									