IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova I** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A tentativa de violação de qualquer uma das regras abaixo anulará a tua prova.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o telefone.

♠

1. Assinale a(s) alternativa(s) correta(s). Uma errada anula uma certa. [5]
   - A. Seguindo um fluxo estacionário, linhas de corrente convergentes indicam aceleração negativa.
   - **B. O operador gradiente eleva a ordem de um tensor.**
   - C. A contração halina é causada pela dissolução de sal, uma substância 2,16 vezes mais densa que a água.
   - **D. Considere um copo d'água com um canudinho de plástico dentro. A tensão superficial na interface ar–água–plástico eleva a água dentro do canudinho.**
   - E. Considere um volume de 1 m^3 de água no oceano como um sistema termodinâmico. Para identificá–lo pintamos a água com corante vermelho. À medida que este volume se desloca notamos que ele se mantém com 1 m^3, troca calor sensível com as águas em volta dele e mantém exatamente o mesmo tom de vermelho. Este sistema pode ser considerado adiabático.

2. Use a expressão matemática da vorticidade para mostrar que uma canoa colocada fora do centro de um vórtice irrotacional não gira em torno de si mesma. [10]

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right)_{\vec{i_r}} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)_{\vec{i_\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r\, u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right)_{\vec{i_z}}$$

Resposta:

Só temos $u_\theta = \frac{C}{r}$, as demais componentes e/ou derivadas são nulas, portanto

$$\begin{aligned} \omega_z &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) = \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial \left[r \left(\frac{C}{r} \right) \right]}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

3. Considere a derivada total da temperatura:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

   (a) Como fica a expressão acima para o caso em que a velocidade não depende do tempo? [5]

   Resposta:
   Não muda nada.

   (b) Como fica a expressão acima para o caso em que a variação da temperatura é nula? [5]

Resposta:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u_i \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

4. A aranha pescadora (*Dolomedes tenebrosus*) anda sobre a água e se alimenta de insetos aquáticos e até de pequenos peixes. Suponha que cada perna da aranha causa uma pequena deformação na superfície da água, que era inicialmente plana. Com o peso da aracnídea a interface se curva com raio de curvatura de 4 mm e abrange uma área circular do mesmo raio. A aranha captura uma aranha d'água (*Argyroneta aquatica*) e se alimenta dela, descartando os dejetos. Após a lauta refeição o raio de curvatura aumenta para 4,5 mm. Sabendo que a tensão superficial σ da água pura é de $71{\times}10^{-3}\mathrm{Nm}^{-1}$, qual a massa (em gramas) da aranha d'água que foi ingerida pela aranha pescadora? $\boxed{10}$

Resposta:
A diferença de pressão por causa da tensão superficial é $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$ e a força total em uma perna é $F_t = \Delta p A$. Essa força tem de equilibrar um oitavo do peso da aranha, portanto $F_t = \frac{mg}{8}$, a massa é $m = \frac{16\sigma\pi r^2}{gr}$ e substituindo os valores dados no primeiro caso ($r = 4$mm) resulta em $m = 1,43$ g. No segundo caso dá $m = 1,81$ g. A diferença é 0,38 g, atribuída à ingestão da infeliz *Argyroneta aquatica*.

5. Um acidente levou ao vazamento de 2,3,7,8-Tetraclorodibenzo-p-dioxina perto de Abrolhos, num local onde as correntes são aproximadamente nulas e a profundidade é de 105 m. Amostras de água foram coletadas em z =100, 50, 20, 10 e 1 m. Nelas foram encontradas concentrações de C =0.200, 0.275, 0.296, 0.299 e 0.300 g.m^{-3}. Assuma que o quadro é estacionário. Sabendo que o coeficiente de difusão dessa substância é $k = 2 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2.\mathrm{s}^{-1}$,

   (a) Obtenha os valores de $q(z)$ para z = 75, 35, 15 4 4,5 m. $\boxed{10}$

   Resposta:
   Use a fórmula da difusão de Fick: $\vec{q} = -k\vec{\nabla}C$. O problema é unidimensional, portanto $q = -k\frac{dC}{dz}$. Podemos aproximar esse cálculo pelas diferenças finitas $q = -k\frac{\Delta C}{\Delta z}$ e fazendo as contas obteremos $q(75, 35, 15, 4.5) = (0.30, 0.14, 0.060.02) \times 10^{-11}$ kg.m^{-2}.s^{-1}.

   (b) Obtenha uma fórmula analítica para $C(z)$ para qualquer z assumindo que o gradiente é contínuo e suave. Dica: plote o gradiente e assuma que $\frac{dC}{dz} = 0$ em $z = 0$. $\boxed{10}$

   Resposta:
   $\frac{\Delta C}{\Delta z}$ = (-0.0015, -0.0007, -0.0003, -0.0001) para z = (75, 35, 15, 4.5), o gradiente é uma reta que passa pela origem. Vamos chamar o gradiente de G. O coeficiente angular m da reta é $\frac{\Delta G}{\Delta z}$. Usando quaisquer dois pontos obtemos $m = -2 \times 10^{-5}$. Para obtermos a concentração basta integrar essa reta em z:

   $$C(z) = \int \frac{dC(z)}{dz} dz = C_0 + m.\frac{1}{2}z^2,$$

   onde C_0 é uma constante que se pode determinar usando, por exemplo, $C(1m) = 0.300$. Fazendo as contas obtemos $C_0 = 0.300 - 10^{-5} \simeq 0.300$, portanto a fórmula é

   $$C(z) = 0.300 - 1 \times 10^{+-5}\, z^2.$$

6. Sabendo que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são tais que $(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$, demonstre que $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. $\boxed{10}$

   Dicas: Abra as derivadas lembrando que $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{bmatrix}$ e que $\vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_i & u_j & u_k \end{bmatrix}$.

   Agrupe termos similares e lembre da regra do produto. Sorria.

Resposta:

Se $(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$,
$(\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) = 0$.
Abrindo as derivadas:

$$\left[(\frac{\partial a_k}{\partial y} - \frac{\partial a_j}{\partial z})_i + (\frac{\partial a_i}{\partial z} - \frac{\partial a_k}{\partial x})_j + (\frac{\partial a_j}{\partial x} - \frac{\partial a_i}{\partial y})_k \right] \cdot (b_i + b_j + b_k)$$

$$- \left[(\frac{\partial b_k}{\partial y} - \frac{\partial b_j}{\partial z})_i + (\frac{\partial b_i}{\partial z} - \frac{\partial b_k}{\partial x})_j + (\frac{\partial b_j}{\partial x} - \frac{\partial b_i}{\partial y})_k \right] \cdot (a_i + a_j + a_k) = 0.$$

Fazendo o produto escalar:

$$\left[(\frac{\partial a_k}{\partial y} b_i - \frac{\partial a_j}{\partial z} b_i) + (\frac{\partial a_i}{\partial z} b_j - \frac{\partial a_k}{\partial x} b_j) + (\frac{\partial a_j}{\partial x} b_k - \frac{\partial a_i}{\partial y}) b_k \right]$$

$$- \left[(\frac{\partial b_k}{\partial y} a_i - \frac{\partial b_j}{\partial z} a_i) + (\frac{\partial b_i}{\partial z} a_j - \frac{\partial b_k}{\partial x} a_j) + (\frac{\partial b_j}{\partial x} a_k - \frac{\partial b_i}{\partial y} a_k) \right] = 0.$$

Agrupando derivadas similares:

$$\frac{\partial b_k}{\partial x} a_j - \frac{\partial a_k}{\partial x} b_j - \frac{\partial b_j}{\partial x} a_k + \frac{\partial a_j}{\partial x} b_k + \frac{\partial b_i}{\partial y} a_k - \frac{\partial a_i}{\partial y} b_k - \frac{\partial b_k}{\partial y} a_i + \frac{\partial a_k}{\partial y} b_i + \frac{\partial b_j}{\partial z} a_i - \frac{\partial a_j}{\partial z} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial z} a_j + \frac{\partial a_i}{\partial z} b_j = 0.$$

Desfazendo as derivadas de produto:

$$\frac{\partial a_j b_k}{\partial x} - \frac{\partial b_j a_k}{\partial x} + \frac{\partial a_k b_i}{\partial y} - \frac{\partial b_k a_i}{\partial y} + \frac{\partial a_i b_j}{\partial z} - \frac{\partial b_i a_j}{\partial z} = 0.$$

Agrupando as derivadas:

$$\frac{\partial (a_j b_k - b_j a_k)}{\partial x} + \frac{\partial (a_k b_i - b_k a_i)}{\partial y} + \frac{\partial (a_i b_j - b_i a_j)}{\partial z} = 0.$$

Reconhecendo o produto escalar:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{Quod Erat Demonstrandum}$$

Resposta:

7. Considere uma superfície A que envolve um volume V. Para que a temperatura T se conserve, a taxa de aumento de temperatura dentro de V tem de ser igual ao fluxo de temperatura para dentro da área A, ou seja: $\boxed{10}$

$$\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV = - \int_A T\vec{u} \cdot d\vec{A}.$$

Considere a temperatura como uma propriedade conservativa neste sistema. A partir da equação acima obtenha a equação ao lado e responda: qual a interpretação física do segundo termo?

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) = 0$$

Resposta:

Usando Gauss $\displaystyle\int_A (T\vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) dV,$ obtemos $\displaystyle\int_V \frac{\partial T}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) d\vec{V} = 0.$

Agrupando, temos $\displaystyle\int_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) \right) d\vec{V} = 0$ Para que o integrando da última expressão se anule para qualquer V é necessário que:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (T\vec{u}) = 0 \ .$$

O segundo termo é o fluxo de temperatura (em K/s) perpendicular à superfície A.

8. Considere uma seção zonal-vertical de temperatura (i.e. $T(x, z)$) no Pacífico tropical. Nessa região passam vórtices que duram ∼55 dias e movem a termoclina para baixo ∼40 m, causando um fluxo vertical de calor. A 120 m de profundidade a temperatura varia de 4 $^\circ C$ por causa da passagem dos vórtices.

   (a) Estime, em $W\,m^{-2}$, esse fluxo de calor turbulento (Q_t) multiplicando a velocidade vertical por causa do vórtice (w) pela capacidade térmica[1] específica (ρC_p) e pela variação de temperatura induzida pela passagem do vórtice (ΔT). $\boxed{10}$

   Resposta:

   $$Q_t = w\rho C_p \Delta T \quad = \frac{40}{55 \times 86400} \left(\frac{m}{s}\right) 1000 \left(\frac{kg}{m^3}\right) 4187 \left(\frac{J}{kg.K}\right) 4(K) \quad = 141(\frac{W}{m^2})$$

   (b) Estime, também em $W\,m^{-2}$, o fluxo difusivo de calor (Q_m) aplicando a lei de Fourier[2]. Use–a nessa mesma região de 40 m de espessura junto à termoclina, portanto a 120 m de profundidade, onde a temperatura varia de 4 $^\circ C$. Assuma um coeficiente de difusão térmica constante $k_m = 0.58\,W\,m^{-1}K^{-1}$. $\boxed{10}$

   Resposta:

   $$Q_m = -k_m \nabla T \quad = 0.58 \left(\frac{W}{m\,K}\right) \frac{4}{40} \left(\frac{K}{m}\right) \quad = 0.058(\frac{W}{m^2})$$

   (c) O que você conclui sobre o efeito da difusão molecular em relação ao da difusão turbulenta nesse caso específico? $\boxed{5}$

   Resposta:

   O efeito da difusão molecular é desprezível pois $\frac{Q_m}{Q_t} \sim 10^{-4}$.

♠

[1] $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, $C_p = 4187 \frac{J}{kg.K}$

[2] Dica: Parece com a de Fick.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pontos	5	10	10	10	20	10	10	25	100
Nota									