IOF221 - Oceanografia Dinâmica I **Prova II** Nome:____________________

Informações:

- Duração de 2:30 horas.
- Pode comer e beber durante a prova.
- Pode fazer a prova à lápis.
- Pode usar calculadora (sem texto).
- A prova tem complexidade progressiva.

A **tentativa** de violação de qualquer regra anulará teu exame.

- Não consulte material ou colegas.
- Sente virado/a para frente.
- Vá ao banheiro antes ou depois do exame.
- Rascunho apenas no verso da prova.
- Desligue e guarde o celular.

---

1. Assinale as afirmações erradas e mostre porque estão erradas.

   (a) Considere uma gota de óleo esférica submersa e em repouso, com raio $r = 1 \times 10^{-6}$ m e centro à profundidade h num tanque com um líquido polar de densidade ρ igual à do óleo. Na notação usual, a pressão no centro da gota é $p = p_a + \rho g h + \frac{2\rho}{r}$. 4

   A. Errado B. Certo

   Resposta:
   Errado, a certa seria $p = p_a + \rho g h + \frac{\sigma}{r}$ onde σ é a tensão superficial dessa interface que é única, portanto não tem o 2.

   (b) Num vórtice de raio R em rotação de corpo sólido a circulação para qualquer $r \leq R$ é zero. 4

   A. Certo **B. Errado**

   Resposta:
   Errado. A circulação é definida como $\Gamma = \oint_0^{2\pi} u_\theta dl$. Em rotação de corpo sólido $u_\theta = \omega r$, e num círculo $dl = r\, d\theta$ portanto $\Gamma = \oint_0^{2\pi} \omega r . r d\theta = \oint_0^{2\pi} \omega r^2 d\theta = 2\pi\omega\, r^2 \neq 0$

   (c) A taxa de deformação dada por: $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ exclui o termo $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$. 4

   A. Errado B. Certo

   Resposta:
   Errado. Como inclui $i = j$, inclui $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

   (d) A força centrífuga tem a mesma magnitude e direção da força centrípeta, mas sentido oposto, portanto num sistema não acelerado elas se anulam. 4

   A. Certo **B. Errado**

   Resposta:
   Errado. A centrífuga é fictícia e só existe no sistema de referência não-inercial. A centrípeta é uma força verdadeira e só existe no sistema de referência inercial. Por estarem em sistemas diferentes elas não podem ser combinadas de forma nenhuma.

   (e) As linhas de corrente de um fluxo bidimensional incompressível são definidas como: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, ou seja, $v\, dx = u\, dy$ 4

   A. Certo B. Errado

   Resposta:

2. Demonstre que $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ e $\epsilon_{ijk}(\frac{\partial u_k}{\partial x_j})\hat{x_i}$ são iguais. 10

Dica: Abra o rotacional e passe para notação indicial, incluindo os versores.

Resposta:

Da definição do rotacional:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{u} &= \vec{\omega} \text{ é a vorticidade.} \\
&= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)_{\hat{x}} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\hat{y}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\hat{z}} \\
&= \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)_{\hat{x_1}} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)_{\hat{x_2}} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)_{\hat{x_3}} \\
& \text{onde eliminados os parênteses, cada derivada parcial é da forma} \\
\omega_i &= \pm(\frac{\partial u_k}{\partial x_j})_{\hat{x_i}} \quad \text{em notação tensorial.}
\end{aligned}
$$

Os índices não se repetem e esse $\pm$ é positivo para o 1º, 3º e 5º termos onde ijk é cíclico, e negativo para o 2º, 4º e 6º termos onde ijk é anticíclico Portanto usando a definição de tensor alternante:

$$
\epsilon_{ijk} = \begin{array}{rl}
1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312,\ \text{(cíclico)} \\
0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\
-1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132\ \text{(anticíclico).}
\end{array}
$$

$$
\vec{\omega} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad \text{Muahahaha!}
$$

3. O fluxo dado por $\psi = -2Axy(x^2 + y^2)^{-2}$ é incompressível? Justifique matematicamente. 15

Dica: A equação acima tem partes que parecem com o raio do círculo, com o seno e/ou cosseno. Evidentemente é mais fácil trabalhar num sistema de coordenadas cilíndrico.

Resposta:

Sim. Convertendo para um sistema de coordenadas cilíndrico, com um pouco de trigonometria de ensino médio temos:

$$
\psi = \frac{-2Axy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-A}{x^2+y^2}\, 2\, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-A}{r^2}\, 2 \sin\theta \cos\theta = -\frac{2A}{r^2}\sin 2\theta
$$

Assim ficou bem mais fácil calcular as velocidades:

$$
u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{-2A}{r^3}\frac{\partial \sin 2\theta}{\partial \theta} = \text{(regra da cadeia)} - \frac{4A}{r^3}\cos 2\theta
$$

$$
u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 2A \sin 2\theta \frac{\partial r^{-2}}{\partial r} = -\frac{4A}{r^3}\sin 2\theta.
$$

Se for incompressível, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, fazendo as derivadas e somando:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial (r\ u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -4A\cos 2\theta \frac{\partial r^{-2}}{\partial r} - \frac{4A}{r^3}\frac{\partial \sin 2\theta}{\partial \theta} =$$
$$\frac{8A}{r^3}\cos 2\theta - \frac{8A}{r^3}\cos 2\theta = 0$$

4. Esta é a **eq. de Navier–Stokes**: $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} + \rho(\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})) - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (1)$$ $\boxed{10}$

Um rio flui para leste sobre 30°N a 3 m/s e tem 1 km de largura. Considere o fluxo estacionário, linear, invíscido, homogêneo e hidrostático. Calcule o desnível meridional entre as margens a partir da equação 1.

Dica: Na horizontal o balanço é geostrófico e na vertical é hidrostático. Use a gravidade aparente.

Resposta:

Sobra o balanço entre as forças de Coriolis e do gradiente de pressão na horizontal e a hidrostática na vertical. Com o rio flui na direção zonal, a velocidade só tem a componente u não-nula. O balanço é

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2\Omega\sin 30^\circ u, \text{ aproximando para diferenças finitas, } \frac{\Delta p}{\Delta y} = 2\Omega \sin 30^\circ u$$

Usando hidrostática para converter a pressão em altura, transformo $\vec{g}$ em gravidade aparente:

$$\rho g\Delta h = 2\Omega\sin 30^\circ\, u\,\Delta y, \quad \Delta h = \frac{2\Omega\sin 30^\circ\, u\,\Delta y}{\rho g}$$

Fazendo as contas,

$$\Delta h = \frac{2\ 7.2\times 10^{-5}\ 0.5\ 3\ 1000}{1000\ 10} = 2.16\times 10^{-5}\text{m}$$

5. Esta também é a **eq. de Navier–Stokes**: $$\rho\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}. \quad (2)$$

(a) Dado um fluxo oceânico estacionário, linear e forçado pelo vento, suponha também que a interface oceano-atmosfera é perfeitamente horizontal e que o fluxo é homogêneo e hidrostático. Dois termos formam o **balanço horizontal** e outros dois formam o **balanço vertical de momentum**. Escreva essas duas equações. $\boxed{10}$

Dica: Note que as 3 últimas simplificações fazem que só haja variação da pressão por causa do peso da coluna d'água.

Resposta:

Aplicando as simplificações temos: $0 = -\vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{u} + \rho\vec{g} - 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$. Com aquelas 3 condições o balanço hidrostático $\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$ é a componente vertical:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g \text{ ou integrando em } z,\ p = p_a + \rho g z \text{ definindo a pressão atmosférica.}$$

Na horizontal sobra $\mu\nabla^2\vec{u} = 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$.

(b) Abra a equação do **balanço horizontal** obtida no item (a) em duas componentes horizontais $\hat{i_x}$ e $\hat{i_y}$. 10

Dicas: Vamos simplificar o termo com o Laplaciano, pois $\nabla^2\vec{u} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u})$, abrindo seriam 12 termos! Relaxe. Considere apenas os 2 maiores termos: as derivadas segundas das velocidades horizontais na direção vertical. No balanço horizontal, coloque só esses termos nas equações para cada direção, o termo em u vai na direção $\hat{i_x}$ e o termo em v na direção $\hat{i_y}$, um em cada uma. Não esqueça considerar o seno da latitude ao abrir o outro termo do balanço.

Resposta:

Na horizontal sobrou $\mu\nabla^2\vec{u} = 2\rho\vec{\Omega}\times\vec{u}$, simplificando o Laplaciano do termo viscoso e abrindo o produto vetorial do termo de Coriolis:

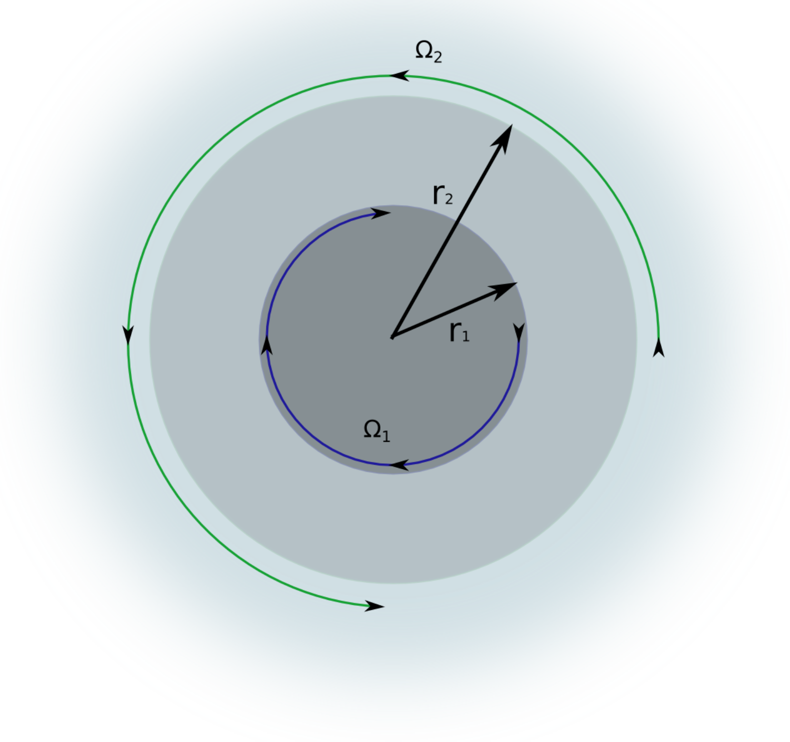
$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -2\rho\Omega\sin\theta\, v \quad \text{em } \hat{i_x} \\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 2\rho\Omega\sin\theta\, u \quad \text{em } \hat{i_y} \end{aligned}$$

(c) Substitua as tensões horizontais de cisalhamento (τ_x, τ_y) nos termos que vieram do Laplaciano. Bem vindo à dinâmica de Ekman. 5

Resposta:

$$\begin{aligned} \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -2\rho\Omega\sin\theta\, v & \qquad \frac{\partial\tau_x}{\partial z} &= -2\Omega\sin\theta\, v \\ \mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= 2\rho\Omega\sin\theta\, u & \qquad \frac{\partial\tau_y}{\partial z} &= 2\Omega\sin\theta\, u \end{aligned}$$

---

6. 

Considere o fluxo laminar bidimensional entre dois círculos concêntricos, como indicado na figura ao lado. Seja r_1 o raio do círculo interno que gira com velocidade angular Ω_1 e r_2 o raio do externo que gira com velocidade angular Ω_2. Há um fluido newtoniano ocupando todo o espaço. Vamos precisar da equação de Navier–Stokes em coordenadas cilíndricas para tratar este problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{u_\theta^2}{r} \qquad (3)\\
\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= -\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right) - \frac{u_r u_\theta}{r} \qquad (4)\\
\text{onde} \quad \nabla^2 &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

(a) Estas equações são simplificadas e ficam na forma: $\boxed{5}$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{u_\theta^2}{r} \qquad (6)\\
0 &= \mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\right) \qquad (7)
\end{aligned}
}
$$

Associe **ordenadamente** os termos (ou grupos de termos) que foram eliminados da Equação 3 com a justificativa física para eliminá–lo(s) da equação 6.

Resposta:

1. $\frac{\partial u_r}{\partial t}$ Fluxo estacionário,
2. $u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$ linear,
3. $\frac{\mu}{\rho}\left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)$ fluxo radial zero, e fluxo tangencial independente de θ. Note que não pode ser simplesmente invíscido pois há um termo em μ na equação 7

(b) Para obter uma solução geral para u_θ integre a Equação 7 duas vezes em r. Ao fazer isso ficam 2 constantes de integração a determinar. $\boxed{10}$

Resposta:
Como u_θ só é função de r, $\partial \to d$. Integrando dos dois lados temos:

$$\int \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(r u_\theta)}{dr}\right) dr = \int 0 dr$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(r u_\theta)}{dr} + C = 0 \quad \text{multiplicando por } r$$

$$\frac{d(r u_\theta)}{dr} + Cr = 0 \quad \text{integrando de novo em } r$$

$$\int \frac{d(r u_\theta)}{dr} dr = \int -Cr dr$$

$$r u_\theta = -C\frac{r^2}{2} - D \quad \text{dividindo por } r$$

$$u_\theta = -\frac{C}{2}r - \frac{D}{r} \quad \text{definindo } A = -\frac{C}{2} \quad B = -D$$

$$u_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Resposta:

(c) Obtenha u_θ para $0 \leq r \leq r_1$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não–escorregamento e fluxo zero na origem para determinar as constantes. Como costumamos chamar $\boxed{5}$

esse tipo de fluxo?

Resposta:
Utilizando a condição de $u_\theta(0) = 0$ obtemos $B = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_1) = \Omega_1 r_1$ obtemos $\Omega_1 r_1 = A r_1 \Rightarrow A = \Omega_1$. Portanto na parte interna $u_\theta = \Omega_1 r$ temos rotação de corpo sólido.

(d) Obtenha u_θ para $r > r_2$ usando a solução geral obtida no item (b), as condições de não–escorregamento e de energia finita para determinar as constantes. Como costumamos chamar esse tipo de fluxo? $\boxed{5}$

Resposta:
Utilizando a condição de contorno de energia finita $u_\theta(\infty) = 0$ obtemos $A = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_2) = \Omega_2 r_2$ obtemos $\Omega_2 r_2 = \frac{B}{r_2} \Rightarrow B = \Omega_2 r_2^2$. Portanto na parte externa $u_\theta = \frac{\Omega_2 r_2^2}{r}$ temos um vórtice irrotacional.

(e) Obtenha u_θ para $r_1 \leq r \leq r_2$ usando a solução geral obtida no item (b) e as condições de não–escorregamento. Deixe A e em termos das constantes conhecidas e B em termos de A e das constantes. $\boxed{5}$

Resposta:
Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_1) = \Omega_1 r_1$ obtemos $(A - \Omega_1) r_1^2 + B = 0$. Utilizando a condição de contorno $u_\theta(r_2) = \Omega_2 r_2$ obtemos $(A - \Omega_2) r_2^2 + B = 0$. Eliminando B obtemos

$$A = \frac{\Omega_1 r_1^2 - \Omega_2 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2} \text{ e } B = \frac{\Omega_1 - A}{r_1^2}$$

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	20	10	15	10	25	30	110
Nota							

♠

Memória não–volátil:

$\Gamma = \oint_C \vec{u}.\vec{dl}$

O tensor alternante ϵ_{ijk} é definido como:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk = 123,\ 231,\ 312,\ \text{(cíclico)} \\ 0 & \text{se quaisquer dois índices forem iguais,} \\ -1 & \text{se } ijk = 321,\ 213,\ 132 \text{ anticíclico).} \end{cases}$$

Conversão do sistema retangular (x, y, z) para o cilíndrico (r, θ, z) e vice-versa:
$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ e
$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $z = z$.
Quanto aos versores,
$i_x = (i_r\cos\theta - i_\theta\sin\theta)$, $i_y = (i_r\sin\theta + i_\theta\cos\theta)$, $i_z = i_z$

Potencial de velocidade e função de corrente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$\Omega = 7.29 \times 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$

Sistema de Coordenadas Cilíndrico ou Polar

$\vec{\nabla}E =$	$\left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)_{\hat{i}_z}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} =$	$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_r)}{\partial r}$	$+$	$\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}$	$+$	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$
$\vec{\nabla}\times\vec{V} =$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_{\hat{i}_r}$	$+$	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)_{\hat{i}_\theta}$	$+$	$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\ u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)_{\hat{i}_z}$