PMR3404 Controle I
Aula 2

Pólos e zeros,
Estabilidade,
Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz

Newton Maruyama
16 de março de 2017

PMR-EPUSP

Introdução

O cálculo da resposta no domínio do tempo $y(t)$ de um sistema $g(t)$ pode ser calculado através da integral de convolução:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau,$$

onde $u(t)$ é o sinal de excitação do sistema.

Usualmente, utiliza-se a transformada de Laplace para a conversão do sistema para o domínio da freqüência:

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Posteriormente, para o cálculo de $y(t)$, pode-se realizar a anti-transformada de Laplace.

Para isto, é mais fácil transformar $Y(s)$ utilizando a técnica de expansão em frações parciais, já que cada fração parcial tem anti-transformada facilmente conhecida.

Neste caso, é possível evidenciar o efeito de cada pólo do sistema e do sinal de entrada $u(t)$. Os zeros de $Y(s)$ desaparecem na expansão em frações parciais.

O efeito dos zeros afeta apenas os coeficentes das frações parciais.

A conclusão que devemos chegar é que os zeros do sistema atuam como filtros evidenciando ou anulando o efeito dos pólos do sistema.

Algumas questões básicas

Seja um sistema linear e invariante no tempo representado por:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u(t),$$

onde,

$$y^{(i)}(t) \triangleq \frac{d^{(i)} y(t)}{dt^{(i)}}, \qquad u^{(i)}(t) \triangleq \frac{d^{(i)} u(t)}{dt^{(i)}},$$

Podemos definir:

$$D(p) \triangleq a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0,$$

e

$$N(p) \triangleq b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0,$$

onde,

$$p^{(i)} \triangleq \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}.$$

Utilizando esta notação podemos escrever:

$$D(p)y(t) = N(p)u(t). \tag{1}$$

A solução para $y(t)$ envolve dois termos. O primeiro, corresponde a resposta do sistema $D(p)y(t) = N(p)u(t)$ considerando uma entrada nula, i.e., $u(t) = 0$. Neste caso, a Equação 1 se reduz a equação denominada *Homogênea*,

$$D(p)y(t) = 0.$$

A sua transformada de Laplace pode ser expressa como:

$$Y(s) = \frac{I(s)}{D(s)},$$

onde $I(s)$ é um polinômio cujos coeficientes dependem das condições iniciais. $D(s)$ é denominado polinômio característico de 1 porque caracteriza a resposta denominada livre, não forçada ou resposta natural. As raízes de $D(s)$ são denominadas modos do sistema.

Por exemplo, se:

$$D(s) = (s-2)(s+1)^2(s+2-j3)(s+2+j3).$$

Os modos do sistema nesse caso são: $2, -1, -2+j3, -2-j3$.

Os pólos tem multiplicidade unitária, com exceção de -1 que possui multiplicidade igual a dois.

Desta forma, para quaisquer condições iniciais, $Y(s)$ pode ser expandido em frações parciais como:

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s-2)} + \frac{K_2}{(s+2-j3)} + \frac{K_3}{(s+2+j3)} + \frac{C_1}{(s+1)} + \frac{C_2}{(s+1)^2}. \qquad (2)$$

A resposta no tempo pode ser escrita como:

$$y(t) = K_1 \exp^{2t} + K_2 \exp^{-(2-j3)t} + K_3 \exp^{-(2+j3)t} + \\ C_1 \exp^{-t} + C_2 t \exp^{-t},$$

onde K_1, K_2, K_3, C_1 e C_2 dependem das condições iniciais.

Se todas as condições iniciais forem nulas a resposta de 1 pode ser escrita como:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = G(s),$$

onde $G(s)$ é a transformada de Laplace quando as condições iniciais são nulas (c.i.n.):

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{\text{c.i.n.}} = \left.\frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]}\right|_{\text{c.i.n.}}.$$

Logo a solução geral da Equação 1 pode ser escrita como:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{I(s)}{D(s)}}_{\text{Resposta a Entrada-Zero}} + \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}U(s)}_{\text{Resposta a Estado-Zero}}.$$

Considere por exemplo a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} - u(t). \tag{3}$$

A utilização da transformada de Laplace considerando condições iniciais não nulas, resulta em:

$$s^2Y(s) - sy(0_-) - \dot{y}(0_-) + 3[sY(s) - y(0_-)] + 2Y(s) = \\ 3[sU(s) - u(0_-)] - U(s),$$

onde $\dot{y} = dy/dt$ e as letras maiúsculas denotam as transformadas de Laplace das variáveis representadas pelas letras minúsculas correspondentes.

Fazendo um reagrupamento dos termos podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+3)y(0_-) + \dot{y}(0_-) - 3u(0_-)}{(s^2+3s+2)}}_{\text{Resposta a Entrada-Zero}} +$$

$$\underbrace{\frac{3s-1}{(s^2+3s+2)}U(s)}_{\text{Resposta a Estado-Zero}}.$$

Esta equação revela que a solução da Equação 3 é parcialmente excitada por $u(t), t > 0$, o que resulta numa parcela denominada de Resposta a Estado-Zero, e parcialmente excitada pelas condições iniciais $y(0_-)$, $\dot{y}(0_-)$, e $u(0_-)$, o que resulta na parcela denominada *Resposta a Entrada-Zero*.

Tais condições iniciais serão denominadas aqui de *estado inicial*. O estado inicial pode ser entendido como o resultado da entrada $u(t)$ para $t \leq 0$.

Expansão em frações parciais

Expansão em frações parciais

Suponha a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{\prod_{l=1}^{m}(s + z_l)}{\prod_{i=1}^{q}(s + p_i)(s + p_m)^r},$$

one $i = 1, \ldots, q$ e $n = q + r$. A expansão em frações parciais de $G(s)$ pode ser escrita como:

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{K_i}{(s + p_i)} + \frac{A_1}{(s + p_m)} + \frac{A_2}{(s + p_m)^2} + + \ldots + \frac{A_r}{(s + p_m)^r},$$

onde:

$$
\begin{aligned}
K_i &= (s+p_i)G(s)\big|_{s=-p_i}\,, \\
A_r &= [(s+p_m)^r G(s)]\big|_{s=-p_m}\,, \\
A_{r-1} &= \frac{d}{ds}[(s+p_m)^r G(s)]\bigg|_{s=-p_m}\,, \\
A_{r-2} &= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[(s+p_m)^r G(s)]\bigg|_{s=-p_m}\,, \\
&\ \vdots \\
A_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}[(s+p_m)^r G(s)]\bigg|_{s=-pm}\,.
\end{aligned}
$$

A função no domínio do tempo pode ser escrita como:

$$
\begin{aligned}
g(t) = \sum_{i=1}^{q} K_i \exp^{-p_i t} + A_1 \exp^{-p_m t} + A_2 t \exp^{-p_m t} + \\
\ldots + A_r t^{r-1} \exp^{-p_m t} .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

A seguir, uma definição formal para pólos e zeros é estabelecida.

Pólo

número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda)| = \infty$.

Zero

número real ou complexo finito λ tal que $|G(\lambda)| = 0$.

Um primeiro questionamento de ordem teórica que pode ser feito é se todas as raízes do polinômio $D(s)$ são polos de $G(s)$.

Considere a seguinte função de transferência:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{2(s^3 + 3s^2 - s - 3)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3}.$$

Para $\lambda = -2$ temos:

$$G(-2) = \frac{6}{0} = \infty.$$

Portanto, $\lambda = -2$ é um pólo e também $\lambda = -2$ é uma raiz de $D(s)$. Agora vamos fazer $\lambda = 1$, dessa forma:

$$G(1) = \frac{N(1)}{D(1)} = \frac{0}{0},$$

o que torna o resultado indefinido.

Entretanto, utilizando a regra de L'Hôpital [1] obtemos:

$$
\begin{aligned}
G(1) = \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=1} &= \left.\frac{N'(s)}{D'(s)}\right|_{s=1}, \\
&= \left.\frac{2(3s^2+6s-1)}{5s^4+16s^3+12s^2-4s-5}\right|_{s=1}, \\
&= \frac{16}{24} \neq \infty.
\end{aligned}
$$

Dessa forma, $\lambda = 1$ não é um pólo de $G(s)$.

[1]A regra de L'Hôpital pode ser utilizada quando existe uma indeterminação do tipo $\lim_{x\to p} \frac{f(p)}{g(p)} = \frac{0}{0}$. Dado $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis e $g'(p) \neq 0$ então:

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5}$$

Portanto, nem toda raiz de $D(s)$ é um pólo de $G(s)$. No exemplo acima, o fato se deve ao fato que $N(s)$ e $D(s)$ possuem um fator comum. Na verdade, a função de transferência pode ser escrita como:

$$\frac{2(s+3)(s-1)(s+1)}{(s-1)(s+2)(s+1)^3} = \frac{2(s+3)}{(s+2)(s+1)^2}.$$

$G(s)$ tem um zero em $s = -3$ e três pólos: $s = -2, -1, -1$.

Através deste exemplo, concluímos que se os polinômios $N(s)$ e $D(s)$ não possuem fatores comums, então todas as raízes de $N(s)$ e $D(s)$ são respectivamente zeros e pólos de $G(s)$.

Se $N(s)$ e $D(s)$ não possuem um fator comum eles são denominados co-primos e $G(s)$ é denominado irredutível.

Resposta a estado-zero

Resposta a estado-zero

A resposta a estado-zero é estabelecida pela seguinte equação:

$$Y(s) = G(s)U(s). \tag{6}$$

Computa-se inicialmente a transformada de Laplace de $u(t)$, $U(s)$, e posteriomente podemos obter $Y(s)$. Uma expansão em frações parciais de $Y(s)$ pode facilmente levar a transformada de Laplace inversa para obtenção da resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$.

A seguir são apresentados alguns exemplos.

Exemplo 1

Dado o sistema

$$G(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)},$$

calcular a resposta para um entrada a degrau unitário $u(t) = 1$ para $t \geq 0$.

Podemos escrever $Y(s)$ como:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\frac{1}{s}.$$

A expansão em frações parciais pode ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s - 1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} + \frac{K_3}{s},$$

onde os coeficientes podem ser calculados como:

$$K_1 = Y(s)(s+1)|_{s=-1} = \left.\frac{3s-1}{(s+2)s}\right|_{s=-1} = \frac{(-4)}{(1)\times(-1)} = 4,$$

$$K_2 = Y(s)(s+1)|_{s=-2} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)s}\right|_{s=-2} =$$

$$\frac{(-7)}{(-1)\times(-2)} = -3.5,$$

$$K_3 = Y(s)s|_{s=0} = \left.\frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{(-1)}{(2)} = -0.5.$$

$Y(s)$ pode então ser representada como:

$$Y(s) = \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)s} = \frac{4}{(s+1)} + \frac{-3.5}{(s+2)} + \frac{-0.5}{s},$$

A resposta no tempo pode então ser calculada como:

$$y(t) = \underbrace{4\exp^{-t} - 3.5\exp^{-2t}}_{\text{Devido aos pólos de } G(s)} - \underbrace{0.5}_{\text{Devido ao pólo de } U(s)}.$$

Podemos observar através do Exemplo Anterior que os termos relativos aos pólos do sistema podem ser divididos em duas partes, uma relativa aos pólos do sistema $G(s)$ e um relativo ao pólo de $U(s)$.

A resposta deste sistema poderia ser escrita genericamente como:

$$y(t) = K_1 \exp^{-t} + K_2 \exp^{-2t} + \text{termos devidos aos pólos de } U(s). \tag{7}$$

Importante !!!!!!!

Uma questão importante é que dependendo de $u(t)$, os pólos de $G(s)$ podem não ser excitados. O exemplo a seguir ilustra esta questão.

Exemplo 2

Considere por exemplo $U(s) = s + 1$. Neste caso,

$$\begin{aligned} Y(s) = G(s)U(s) &= \frac{3s-1}{(s+1)(s+2)}(s+1), \\ &= \frac{3s-1}{(s+2)} = \frac{3(s+2)-7}{(s+2)} = 3 - \frac{7}{(s+2)}. \end{aligned}$$

O que implica em:

$$y(t) = 3\delta(t) - 7\exp^{-2t}.$$

Exemplo 3

Vamos supor agora que:

$$u(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \exp -3t,$$

A transformada de Laplace é dada por:

$$U(s) = \frac{(s+1)}{s(s+3)},$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{3s-1}{(s+2)(s+1)} \frac{s+1}{s(s+3)} = \frac{3s-1}{(s+2)(s+3)s} \\ &= \frac{7}{2(s+2)} - \frac{10}{3(s+3)} - \frac{1}{6s}. \end{aligned}$$

A resposta do sistema no domínio do tempo $y(t)$ é dada por:

$$y(t) = \frac{7}{2}\exp^{-2t} - \frac{10}{3}\exp^{-3t} - \frac{1}{6}.$$

Neste exemplo, é possível observar que a excitação ou não do pólo depende se $U(s)$ possui um zero para cancelá-lo.

Pólos e suas características no domínio do tempo

Pólo real negativo $s = -\sigma$

- Função de transferência:

$$\frac{K}{(s+\sigma)}.$$

- Resposta no domínio do tempo:

$$K\exp^{-\sigma t}.$$

Pólo real positivo $s = +\sigma$

- Função de transferência:
$$\frac{K}{(s-\sigma)}.$$
- Resposta no domínio do tempo:
$$K \exp^{\sigma t}.$$

Pólos complexos conjugados com parte real negativa $s = -\sigma \pm j\omega$

- Função de transferência:

$$\frac{K_i}{(s+\sigma-j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma+j\omega)}.$$

  Onde $K_i = K_{i+1}^*$.
- Resposta no domínio do tempo:

$$K_i \exp^{-(\sigma-j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(\sigma+j\omega)t},$$
$$A \exp^{-\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

Pólos complexos conjugados com parte real positiva $s = +\sigma \pm j\omega$

- Função de transferência:

$$\frac{K_i}{(s - \sigma - j\omega)} + \frac{K_{i+1}}{(s - \sigma + j\omega)}.$$

  Onde $K_i = K_{i+1}^*$.

- Resposta no domínio do tempo:

$$K_i \exp^{-(-\sigma - j\omega)t} + K_{i+1} \exp^{-(-\sigma + j\omega)t},$$
$$A \exp^{\sigma t} \sin(\omega t + \Phi).$$

Pólos reais negativos com multiplicidade 2 $s = -\sigma$

- Função de transferência:

$$\frac{Ki}{(s+\sigma)} + \frac{K_{i+1}}{(s+\sigma)^2}.$$

- Resposta no domínio do tempo:

$$K_i \exp^{-\sigma t} + K_{i+1} t \exp^{-\sigma t}.$$

Pólos imaginários $s = \pm j\omega$

- Função de transferência:

$$\frac{k_i}{s - j\omega} + \frac{K_{i+1}}{s + j\omega}.$$

  Onde $K_i = K_{i+1}^*$.
- Resposta no domínio do tempo:

$$\begin{aligned} & K_i \exp^{j\omega t} + K_{i+1} \exp^{-j\omega t}, \\ & A \sin(\omega t + \Phi). \end{aligned} \tag{8}$$

Pólos imaginários duplos $s = \pm j\omega$

- Função de transferência:

$$\frac{K}{(s^2+\omega^2)^2} =$$
$$\frac{K}{(s+j\omega)^2(s-j\omega)^2} =$$
$$\frac{K_1}{(s+j\omega)} + \frac{K_2}{(s+j\omega)^2} + \frac{K_3}{(s-j\omega)} + \frac{K_4}{(s-j\omega)^2}.$$

- Resposta no domínio do tempo:

$$g(t) = A_1 \sin(\omega t + \Phi_1) + A_2 t \sin(\omega t + \Phi_2).$$

O efeito dos zeros

O efeito dos zeros

- O efeito dos zeros sobre a resposta do sistema é mais difícil de ser inferido.
- Apesar da localização dos pólos determinar a natureza dos modos do sistema, é a localização dos zeros que determina a proporção que os modos são combinados.
- Estas combinações podem fazer com que os resultados sejam bastante diferentes quando comparados com os modos individuais relativos a cada pólo.

- Da mesma forma como nos pólos, também podemos definir zeros rápidos e zeros lentos. Zeros
- rápidos são aqueles que estão bastante afastados em relação ao eixo imaginário quando comparado com os pólos dominantes.
- Por outro lado, zeros lentos são aqueles que estão bem mais próximos do eixo imaginário do que os pólos dominantes.

Exemplo 1

- Para ilustrar a influência dos zeros na resposta do sistema a resposta a degrau de vários sistemas com pólos iguais mas com zeros diferentes são comparados.
- Os sistemas definidos pelas funções de transferência $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ e suas respectivas expansões em frações parciais podem ser observados na Tabela.
- A expansão em frações parciais de qualquer um desses sistemas pode ser representada por:

$$Y(s) = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+1+j)} + \frac{K_3}{(s+1-j)} + \frac{K_4}{s}.$$

Tabela 1: Respostas a degrau dos sistemas.

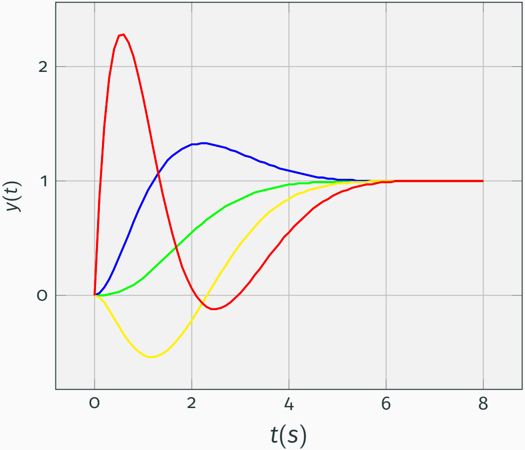
	K_1	K_2	K_3	K_4
$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-2	$0.5 + j0.5$	$0.5 - j0.5$	1
$G_2(s) = \frac{0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	2	$-1.5 - j0.5$	$-1.5 - j0.5$	1
$G_3(s) = \frac{-0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	-6	$2.5 + j0.5$	$2.5 - j0.5$	1
$G_4(s) = \frac{10(s^2+0.1s+0.2)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$	1	$5 + j4.5$	$5 - j4.5$	1

$$G_1(s) = \frac{2}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_2(s) = \frac{0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_3(s) = \frac{-0.2(s+10)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_4(s) = \frac{10(s^2+0.1s+0.2)}{(s+1)(s+1+j)(s+1-j)}$$



Exemplo 2

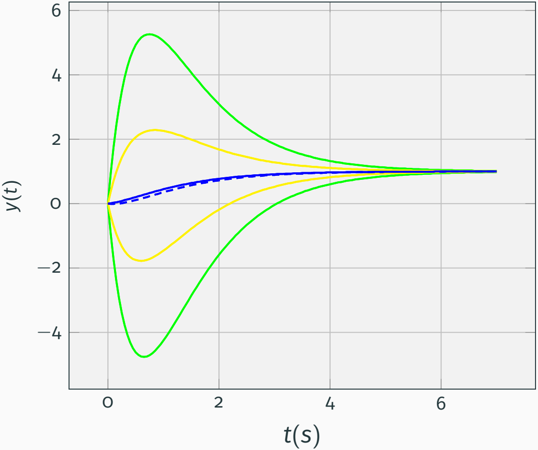
Considere, por exemplo, a seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{-s + c}{c(s+1)(0.5s+1)},$$

Nesse sistema é possível verificar a variação da resposta $y(t)$ através da variação do parâmetro c sem a mudança dos valores dos pólos e do ganho do sistema.

$$H(s) = \frac{-s + c}{c(s+1)(0.5s+1)},$$

- $c = -0.1, 0.1$
- $c - 0.25, 0.25$
- $c = -10, 10$



Os dois modos naturais do sistema são representados por, $\exp^{-1t}$ e $\exp^{-2t}$, que são relacionados aos pólos -1 e -2 respectivamente.

O efeito do primeiro modo natural $\exp^{-1t}$ pode gradativamente ser anulado a medida que $c \rightarrow -1$.

O mesmo acontece para $\exp^{-2t}$ quando $c \rightarrow -2$.

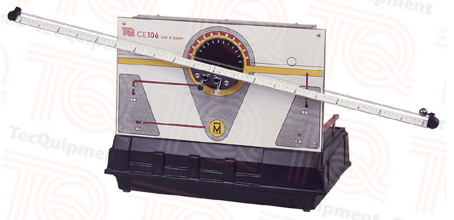
Uma situação mais geral, pode ser observada na Figura onde é apresentado a resposta a degrau do sistema $H(s)$ considerando $c = -0.1, 0.1, -0.25, 0.25, -10, 10$.

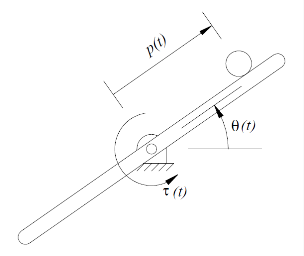
Pode ser observado que, para um zero rápido, por exemplo $|c| \gg 1$, não existe um impacto significativo na resposta transitória. Quando o zero é lento e estável o sistema possui sobresinal significativo.

Quando o zero é lento e instável então o sistema exibe um *undershoot* significativo.

Estabilidade

Sistema bola e barra (Ball and Beam)

- Objetivo: equilibrar a bola numa posição específica.
- 



$$\left[\frac{J_b}{r^2} + m\right] + mg\sin\theta(t) - mp(t)\dot{\theta}(t)^2 = 0 \tag{9}$$

$$\left[mp(t)^2 + J + J_b\right]\ddot{\theta}(t) + 2mp(t)\dot{p}(t)\dot{\theta} + mgp(t)\cos\theta(t) = \tau(t) \tag{10}$$

- J_b momento de inércia da bola
- m massa da bola
- r raio da bola
- J momento de inércia da haste
- θ ângulo da haste
- $p(t)$ distância da bola ao centro da haste

-

$$G_1(s) = \frac{P(s)}{T(s)} = \frac{-mg}{J_{E_1}J_{E_2}s^4 - m^2g^2} \tag{11}$$

$$J_{E_1} = \frac{J_b}{r^2} + m \tag{12}$$

$$J_{E_2} = \frac{mL^2}{4} + J + J_b \tag{13}$$

A importância do modelo

- Muitos sistemas, especialmente sistemas aeronáuticos e aerospaciais, possuem este comportamento dinâmico.
- Por exemplo: mísseis, foguetes, aviões, etc.

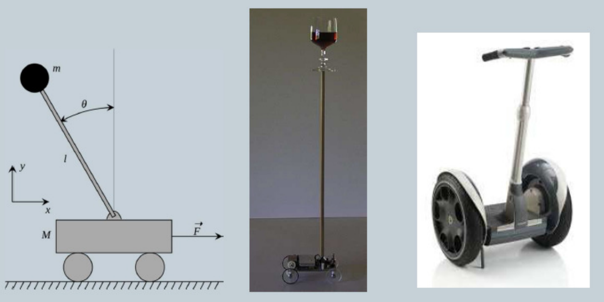



Supermaneuverability

- Super-manobrabilidade.
- Aviões de combate são intencionalmente feito instáveis ou quase instáveis.
- Por exemplo, o avião deve ser capaz de realizar a manobra *Pugachev's Cobra*.

Eurofighter Typhoon

Pêndulo invertido



Parâmetros

- massa do pêndulo $m = 0.5Kg$,
- massa do carro $M = 0.5Kg$,
- comprimento do pêndulo $l = 0.3m$,
- coeficiente de atrito viscoso $b = 0.1N/m/s$,
- momento de inércia do pêndulo $I_p = 0.006Kgm^2$,
- cte gravitacional $I_p = 9.81m/s^2$.

modelo linearizado

- Modelo linearizado em $\theta = 0^o$ ($\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 0$),

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{\frac{ml}{q}s}{s^3 + \frac{b(I_p+ml^2}{q}s^2 - \frac{(M+m)mgl}{q}s - \frac{bmgl}{q}}, \tag{14}$$

- where $q = [(M+m)(I_p ml^2) - (ml)^2]$.

- Função de transferência:

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{5.2632}{s^3 + 0.1789s^2 - 51.6316s - 5.1649} \tag{15}$$

- Pólos: $s_1 = 7.1467$, $s_2 = -7.2256$, $s_3 = -0.1$.
- Pólo s_1 é instável.
- Um problema mais desafiador seria controlar $\theta(t)$ e $x(t)$ simultaneamente utilizando $f(t)$.

Estabilidade: algumas definições

Definition (Estabilidade absoluta)
se refere a condição se um sistema é estável ou instável.

Definition (Estabilidade relativa)
se o sistema é estável, pode-se determinar o grau de estabilidade deste sistema.

Seja:

- $u(t)$: entrada do sistema,
- $y(t)$: saída do sistema,
- $g(t)$ resposta impulsiva.

Definition (Estabilidade Entrada-Saída)
com condições iniciais nulas, o sistema é dito ser Entrada-Saída estável, ou simplesmente estável, se a saída $y(t)$ é limitada para uma entrada $u(t)$ limitada.

Ou ainda, para um número $0 < Q < \infty$:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \leq Q < \infty. \tag{16}$$

A condição dada pela Equação 16 implica que a área sobre a curva $|g(t)| \times t$ deve ser finita.

Sistema marginalmente estável

Um sistema é marginalmente estável se o sistema não for assintoticamente estável e se for possível escolher constantes $A, B < \infty$ tal que:

$$\int_0^{\infty} |g(t)|dt < A + BT, \forall T \tag{17}$$

Interpretação: O sistema é marginalmente estável se a integral cresce linearmente com o tempo T.

Exemplos:

1. $$G(s) = \frac{1}{s} \tag{18}$$

   Sistema marginalmente estável

2. $$G(s) = \frac{1}{s^2} \tag{19}$$

   Sistema instável

Theorem

Um sistema SISO com uma função de transferência própria $G(s)$ é estável, se e somente se cada pólo de $G(s)$ possui parte real negativa.

Estabilidade com entrada nula, estabilidade assintótica ou estabilidade interna

- A estabilidade com entrada nula se refere à condição de estabilidade quando a entrada é nula e o sistema é dirigido pelas condições iniciais não nulas $\mathbf{x_0}$.

Definition

A resposta com entrada nula do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é marginalmente estável se para cada estado inicial finito x_0 excita uma resposta $\mathbf{x}(t)$ limitada.

Definition

A resposta com entrada nula do sistema $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ é assintoticamente estável se para cada estado inicial finito x_0 excita uma resposta $\mathbf{x}(t)$ limitada e ainda $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x} = 0$.

Exemplo

Vamos supor, o seguinte sistema de 1a. ordem:

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t). \tag{20}$$

Este sistema pode ser escrito, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t); \\ y(t) = x(t), \end{cases} \tag{21}$$

o que corresponde à representação em espaço de estados.

Fazendo o sinal de entrada $u(t) = 0$, obtemos:

$$\dot{x}(t) = ax(t). \tag{22}$$

Utilizando a propriedade da Transformada de Laplace para a derivada de um sinal, temos:

$$sX(s) - x(0) = aX(s). \tag{23}$$

Logo:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} x(t) = e^{at}x(0). \tag{24}$$

Observando a Equação 24 podemos concluir que:

- Se o pólo é positivo ($a > 0$) então $x(t)$ cresce indefinidamente, ou seja:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \infty. \tag{25}$$

- Se o pólo é negativo ($a < 0$) então $x(t)$ decresce exponencialmente, ou seja:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0. \tag{26}$$

Obviamente, a estabilidade assintótica do estado $x(t)$ implica na estabilidade assintótica da saída $y(t)$.

- O mesmo resultado, pode ser extrapolado para sistemas de ordem n:

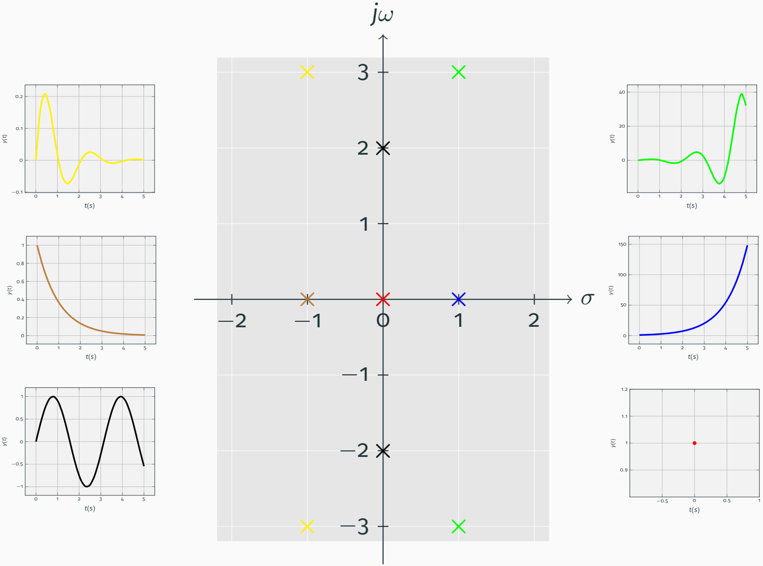
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \tag{27}$$

- onde A é uma matriz $n \times n$. Neste caso, poderíamos escrever:

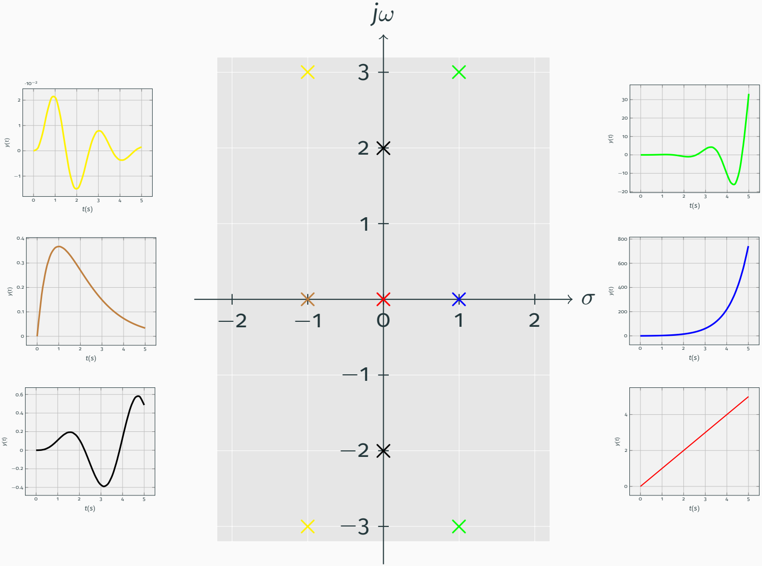
$$\mathbf{x}(t) = e^{At}x(0), \tag{28}$$

- e da mesma forma, o vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ decresce exponencialmente se e somente se os pólos do sistema tiverem parte real negativa.

Pólos e suas respostas impulsivas m=1



Pólos e suas respostas impulsivas m=2

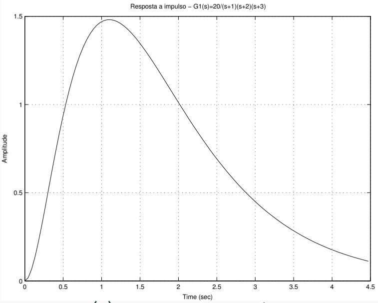


Condição de Estabilidade	**Valores de** $\mathbf{s} = \sigma_\mathbf{i} + \mathbf{j}\omega_\mathbf{i} \quad (\mathbf{i} = 1, \ldots, \mathbf{n})$
Assintoticamente Estável/ Estável	• $\sigma_i < 0$ para $i = 1, \ldots, n$
Marginalmente estável ou Marginalmente instável	• pelo menos algum $\sigma_i = 0$, • nenhum valor $\sigma_i > 0$, • nenhum pólo múltiplo no eixo $j\omega$.
Instável	• Pelo menos algum $\sigma_i > 0$ ou algum pólo $\sigma_i = 0$ de ordem múltipla (pólo de ordem múltipla no eixo $j\omega$)

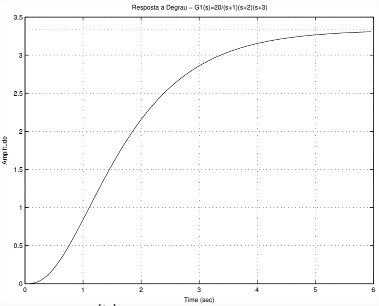
Tabela 2: Condições de estabilidade de sistemas SISO invariantes no tempo.

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \tag{29}$$

Obviamente trata-se de um sistema estável. Os pólos são: $s = -1$, $s = -2$ e $s = -3$.



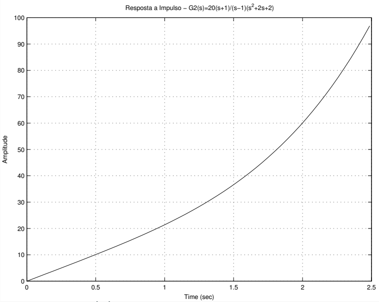
(a) Resposta a Impulso



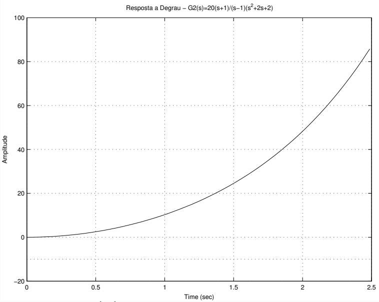
(b) Resposta a Degrau

$$G_2(s) = \frac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}. \tag{30}$$

O sistema é instável porque existe um pólo em $s = 1$.



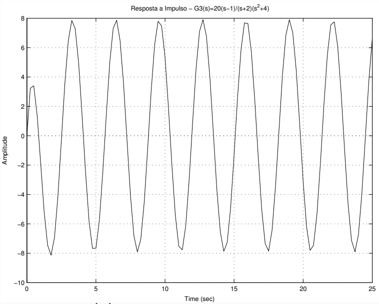
(c) Resposta a Impulso



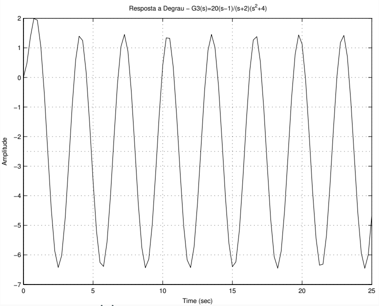
(d) Resposta a Degrau

$$G_3(s) = \frac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}. \tag{31}$$

O sistema é marginalmente estável devido ao par de pólos complexos conjugados $\pm j2$.



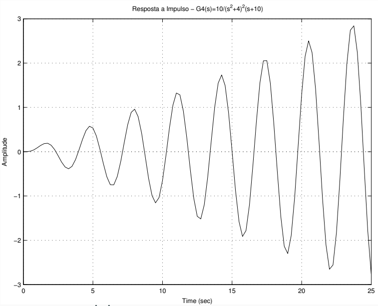
(e) Resposta a Impulso



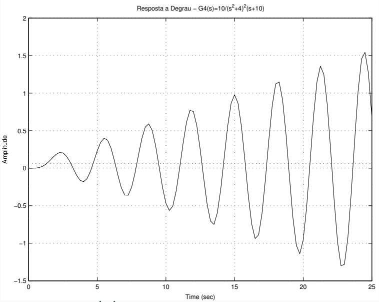
(f) Resposta a Degrau

$$G_4(s)\frac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}. \quad (32)$$

O sistema é instável devido aos pólo complexos de ordem múltipla $s = \pm j2$



(g) Resposta a Impulso



(h) Resposta a Degrau

O método de Routh-Hurwitz permite definir a estabilidade de um sistema a partir da equação característica do sistema. A equação característica de um sistema SISO (Single Input Single Output) invariante no tempo pode ser escrita como:

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0. \tag{33}$$

Para se determinar a estabilidade ou não de um sistema é necessário determinar se alguma das raízes de $F(s)$ pertence ao semi-plano direito de s. Se a Equação 33 é escrita na forma fatorada obtemos:

$$F(s) = a_n (s - r_1)(s - r_2) \ldots (s - r_n), \tag{34}$$

onde r_i é a i-ésima raiz da equação característica.

Multiplicando todos os fatores, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
F(s) = & a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)s^{n-1} \\
& + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 + \ldots)s^{n-2} \\
& - a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots)s^{n-3} + \ldots \\
& + a_n(-1)^n r_1 r_2 r_3 \ldots r_n
\end{aligned} \tag{35}
$$

Em outras palavras, para uma equação de ordem n, obtemos:

$$
\begin{aligned}
F(s) = & a_n s^n - a_n(\text{soma de todas as raízes})s^{n-1} \\
& + a_n(\text{soma de todos os produtos de raízes duas a duas})s^{n-2} \\
& - a_n(\text{soma de todos os produtos de raízes três a três})s^{n-3} + \dots \\
& + a_n(\text{produto de todas as raízes}) = 0
\end{aligned}
$$

- Examinando a Equação 35, podemos notar que todos os coeficientes do polinômio devem ter o mesmo sinal se todas as raízes estão no semi-plano esquerdo.
- Além disso, é necessário que todos os coeficientes sejam não nulos.
- Esses requisitos são necessários mas não suficientes. Isto é, se estes requisitos não forem satisfeitos, já podemos afirmar que o sistema não é estável.
- Entretanto, se os requisitos forem satisfeitos, não necessariamente temos um sistema estável.

- Por exemplo, para a seguinte equação característica:

$$F(s) = (s+2)(s^2 - s + 4) = (s^3 + s^2 + 2s + 8).$$

- Este sistema é instável, mesmo tendo todos os coeficientes de mesmo sinal.

O critério de Hurwitz

- A condição necessária e suficiente para que todas as raízes da equação característica estejam no semi-plano esquerdo é satisfeita quando todos os determinantes de Hurwitz $D_k, k = 1, 2, \ldots$ sejam positivos.
- Os determinantes de Hurwitz para a equação característica são dados por:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} \end{vmatrix} \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \\ &\ldots \end{aligned} \tag{36}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} \tag{37}$$

A tabulação de Routh

- Felizmente, não é necessário calcular os determinantes de Hurwitz. Um método equivalente foi desenvolvido por Routh e é comumente denominado tabulação de Routh.
- Inicialmente, arranja-se os coeficientes da seguinte forma:

$$\begin{array}{cccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & a_{n-8} & \dots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & a_{n-9} & \end{array}$$

- Vamos utilizar como exemplo uma equação de 6a. ordem:

$$F(s) = a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0. \tag{38}$$

- Para este caso a Tabulação de Routh é calculada como:

Cálculos para ordem 6

$$
\begin{array}{lcccc}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A & \dfrac{a_5a_2 - a_6a_1}{a_5} = B & \dfrac{a_5a_0 - a_6 0}{a_5} = a_0 & 0 \\
s^3 & \dfrac{Aa_3 - a_5B}{A} = C & \dfrac{Aa_1 - a_5a_0}{A} = D & \dfrac{A0 - a_5 0}{A} = 0 & 0 \\
s^2 & \dfrac{BC - AD}{C} = E & \dfrac{Ca_0 - A0}{C} = a_0 & \dfrac{C0 - A0}{C} = 0 & 0 \\
s_1 & \dfrac{ED - Ca_0}{E} = F & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & \dfrac{Fa_0 - E0}{F} = a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

- O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz estabelece que o número de pólos do sistema com parte real positiva é igual ao número de trocas de sinal dos elementos da primeira coluna da tabela.

Exemplo 1

Considere a equação:

$$F(s) = (s-2)(s+1)(s-3) = s^3 - 4s^2 + s + 6 = 0. \tag{39}$$

A equação acima possui um coeficiente negativo, o que significa que não satisfaz as condições necessárias para a estabilidade. Através da forma fatorada, sabemos que existem duas raízes no semi-plano direito: $s = 2$, $s = 3$.

Exemplo1

Vamos examinar quais seriam os cálculos do método de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{ccc}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & -4 & 6 \\
s^1 & \frac{(-4)(1)-(6)(1)}{-4} = 2.5 & 0 \\
s^0 & \frac{(2.5)(6)-(-4)(0)}{2.5} = 6 & 0
\end{array}$$

Existem duas mudanças de sinal na coluna 1, indicando a presença de duas raízes no semi-plano direito.

Exemplo 2

Considere a equação:

$$F(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0. \tag{40}$$

Neste caso, as condições necessárias são satisfeitas, i.e., todos os termos estão presentes e de mesmo sinal.

A tabulação de Routh-Hurwitz é calculada como:

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 2 & 3 & 10 \\
s^3 & 1 & 5 & 0 \\
s^2 & \frac{(1)(3)-(2)(5)}{1} = -7 & 10 & 0 \\
s^1 & \frac{(-7)(5)-(1)(10)}{-7} = 6.43 & 0 & 0 \\
s^0 & 10 & 0 & 0
\end{array}
$$

Como existem duas mudanças de sinal na primeira coluna existem duas raízes no semi-plano direito. As quatro raízes do sistema são dadas por:

- $s = -1.0055 \pm j0.9311$,
- $s = 0.7555 \pm j1.4444$.

Caso Especial 1

Se o primeiro elemento de qualquer linha for zero e os outros forem diferentes de zero, os elementos da próxima linha serão todos infinitos. Para solucionar este problema, dev-se substituir o elemento nulo por um número positivo ϵ arbitrariamente pequeno.

Exemplo 3

$$F(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0 \tag{41}$$

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 2 & 3 \\ s^3 & 1 & 2 & 0 \\ s^2 & \boxed{0 \rightarrow \epsilon} & 3 & \end{array}$$

Como a linha correspondente a s^2 possui o primeiro elemento nulo, devemos substituí-lo por ϵ.

Exemplo 3

$$
\begin{array}{cccc}
s^4 & 1 & 2 & 3 \\
s^3 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & \epsilon & 3 & \\
s^1 & \frac{2\epsilon-3}{\epsilon} = \frac{-3}{\epsilon} & 0 & \\
s^0 & 3 & 0 &
\end{array}
$$

Existem duas mudanças de sinal o que significa que existem duas raízes no semi-plano direito. As raízes são:

- $s = -0.09057 \pm j0.902$,
- $s = 0.4057 \pm j1.2928$.

OBS: O método pode não funcionar se o sistema possui raízes imaginárias puras.

Caso Especial 2

Se todos os elementos de uma linha são zeros as seguintes condições podem existir:

- A equação possui pelo menos um par de raízes reais iguais mas de sinais opostos,
- A equação tem um ou mais pares de raízes imaginárias,
- A equação tem pares de raízes complexas conjugadas formando uma simetria em relação à origem. Ex: $s = -1 \pm j1$, $s = 1 \pm j1$.

Uma possível solução consiste em utilizar uma equação auxiliar $A(s) = 0$ que corresponde à linha anterior de zeros. A equação auxiliar sempre contêm apenas termos de ordem par. As raízes da equação auxiliar também satisfazem a equação original.

O método consiste nos seguintes passos:

- Escreva a Equação $A(s)$ utilizando os coeficientes da linha anterior nula,
- Calcule a derivada da equação $A(s)$:

$$\frac{dA(s)}{ds} = 0, \tag{42}$$

- Substitua a linha de zeros pelos coeficientes de $dA(s)/ds = 0$.

Exemplo 4

Vamos tentar determinar a estabilidade absoluta de um sistema que possua a seguinte equação característica:

$$F(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0. \tag{43}$$

A tabulação de Routh-Hurwitz é calculada como:

$$\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 8 & 7 \\
s^4 & 4 & 8 & 4 \\
s^3 & 6 & 6 & 0 \\
s^2 & 4 & 4 & \\
s^1 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Exemplo 4

Como podemos observar a linha correspondente à linha s^1 é nula. Os polinômios $A(s)$ E $dA(s)/ds$ neste caso seriam dados por:

$$\begin{aligned} A(S) &= 4s2 + 4 = 0 \\ \frac{dA(s)}{ds} &= 8s = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Exemplo 4

A tabulação de Routh-Hurwitz seria agora dada por:

$$\begin{array}{llll} s^5 & 1 & 8 & 7 \\ s^4 & 4 & 8 & 4 \\ s^3 & 6 & 6 & 0 \\ s^2 & 4 & 4 & \\ s^1 & 8 & 0 & \\ s^0 & 4 & & \end{array} \tag{45}$$

Como não há mudanças de sinal não há raízes no semi-plano direito. As raízes de $A(s)$ são $s = \pm j$ o que indica que o sistema é marginalmente estável.