

**Introdução às Medidas em Física**  
**4300152**  
**4<sup>a</sup> Aula**

*Nemitala Added*

*nemitala@dfn.if.usp.br*

**Prédio novo do Linac, sala 204, r. 6824**

# **Experiência II**

## **Densidade de Sólidos**

### **Objetivos**

**Medidas indiretas**

**Medida da densidade de sólidos**

**Noções de Estatística**

**Propagação de Incertezas**

**Compatibilidade entre medidas**

# Características de uma medida

**Medidas repetidas – diferentes**

Diferentes experimentadores

Diferentes instrumentos

**Nunca iremos obter o valor verdadeiro em  
nossas medições**

características da própria grandeza sendo medida

limitações intrínsecas e inevitáveis dos nossos  
instrumentos e técnicas de medida

# Conceitos envolvidos em uma medida experimental

**Definindo:**

**Erro = *valor verdadeiro - valor medido***

**toda medida experimental apresenta um erro, que precisa ser estimado e compreendido**

**Incerteza = *estimativa estatística do valor do erro***

# Como realizar medidas

## Análise do instrumento de medida

identificação do tipo e funcionamento

## Fundo de escala e unidade

seleção conveniente

## Precisão e incerteza da medida

**Instrumental**

Escala simples

Duas escalas: principal e auxiliar (nônio ou vernier)

**Método**

Aleatórios

# Como avaliar incerteza

## Tipos de incerteza

### Instrumental

**Aquela associada à precisão do instrumento utilizado para realizar a medida direta de uma grandeza**

### Estatística

**Incerteza associada à flutuação no resultado de uma mesma medida**

### Sistemática

**Aquela onde a medida é desviada em uma única direção, tornando os resultados viciados**

# **Incertezas instrumentais**

**Em geral é a metade da menor divisão**

**Cuidado com instrumentos que possuem escalas auxiliares tipo nônio (ex:paquímetro)**

**incerteza é a menor divisão do mesmo**

**Dificuldade de leitura**

**Posicionamento objeto/instrumento ou estabilidade de leitura (digital)**

**incerteza instrumental maior pode ser definida maior do que a precisão do instrumento de medida**

# Incertezas estatísticas

## Flutuação no resultado das medidas

medida = média de todas as medidas efetuadas

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

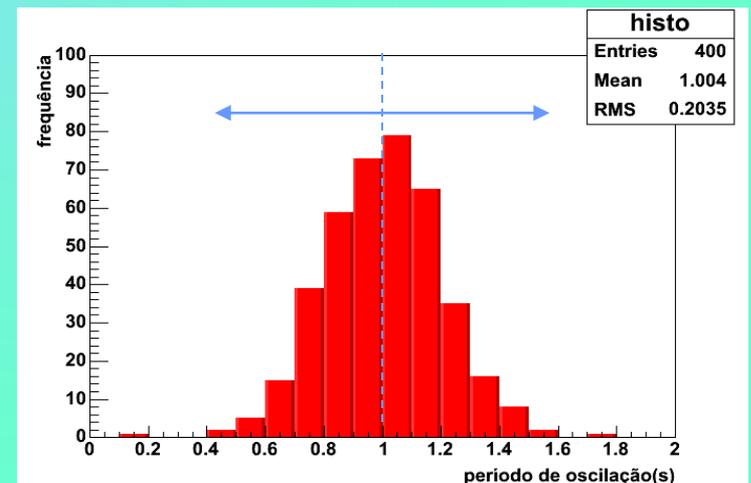
incerteza estatística = desvio padrão da média

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

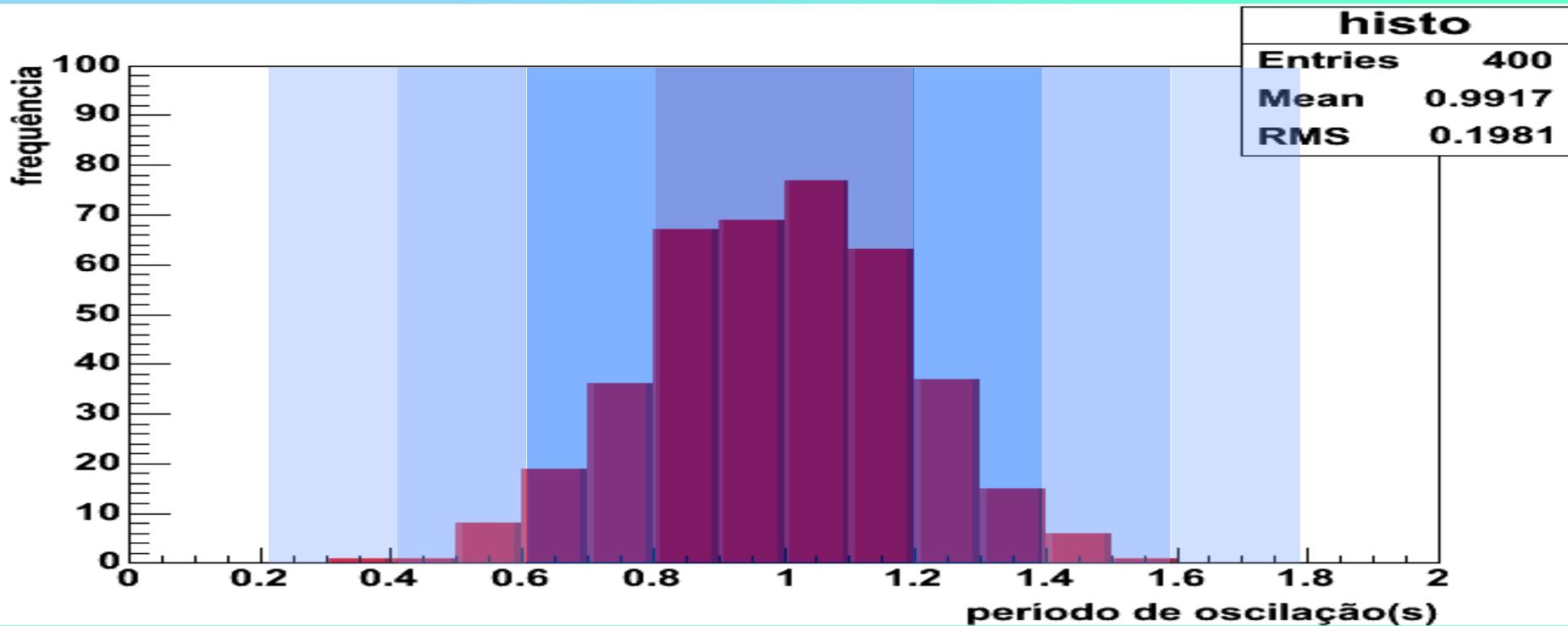
# Erros Estatísticos ou Aleatórios

Inicialmente, que características devemos esperar para a distribuição dos dados obtidos?

Simétrica em torno de um certo valor, e decresce ao se afastar desse valor.



# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão



Quase  
Impossível

Muito  
Pouco  
Provável

Pouco  
Provável

Provável

Muito Provável

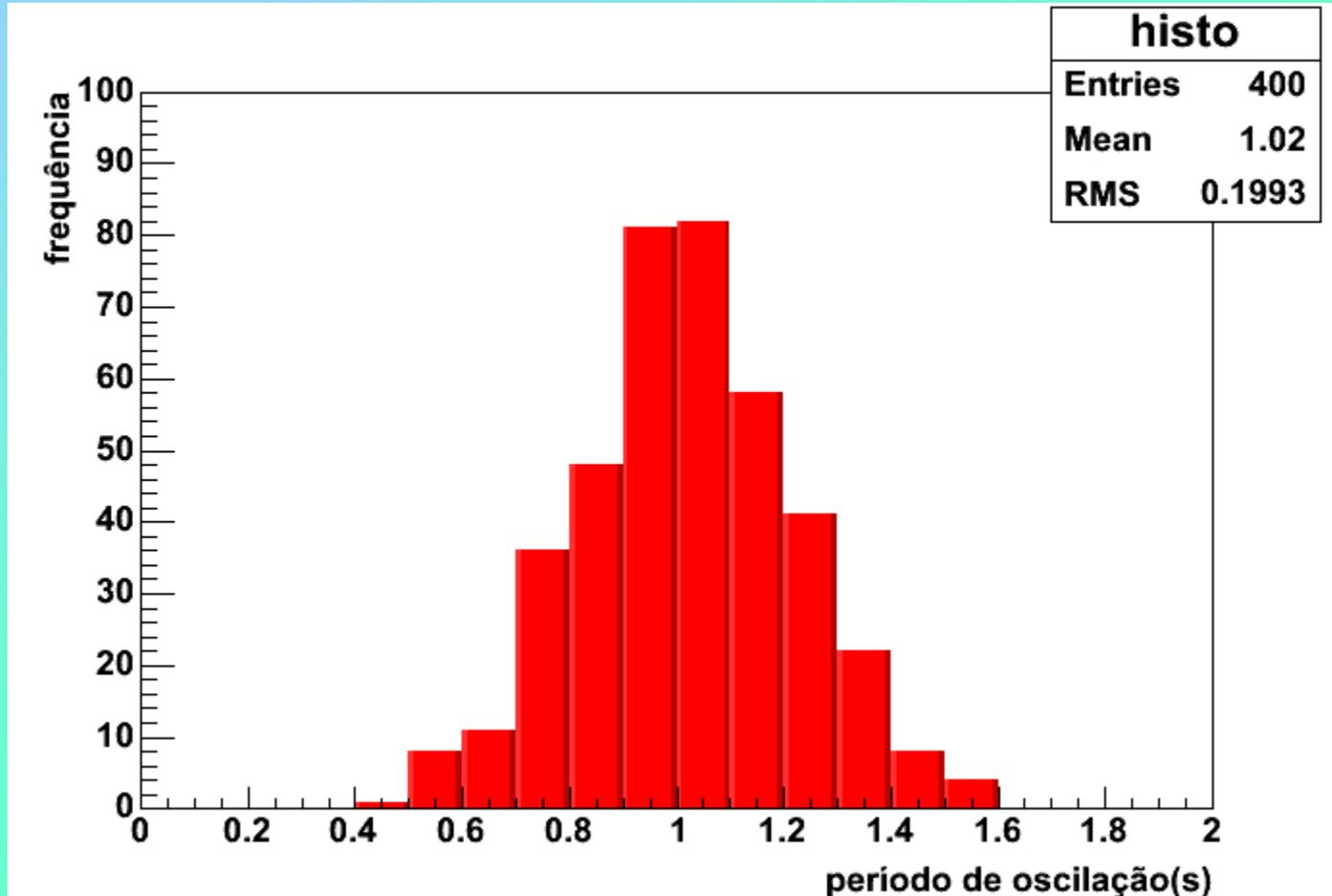
Provável

Pouco  
Provável

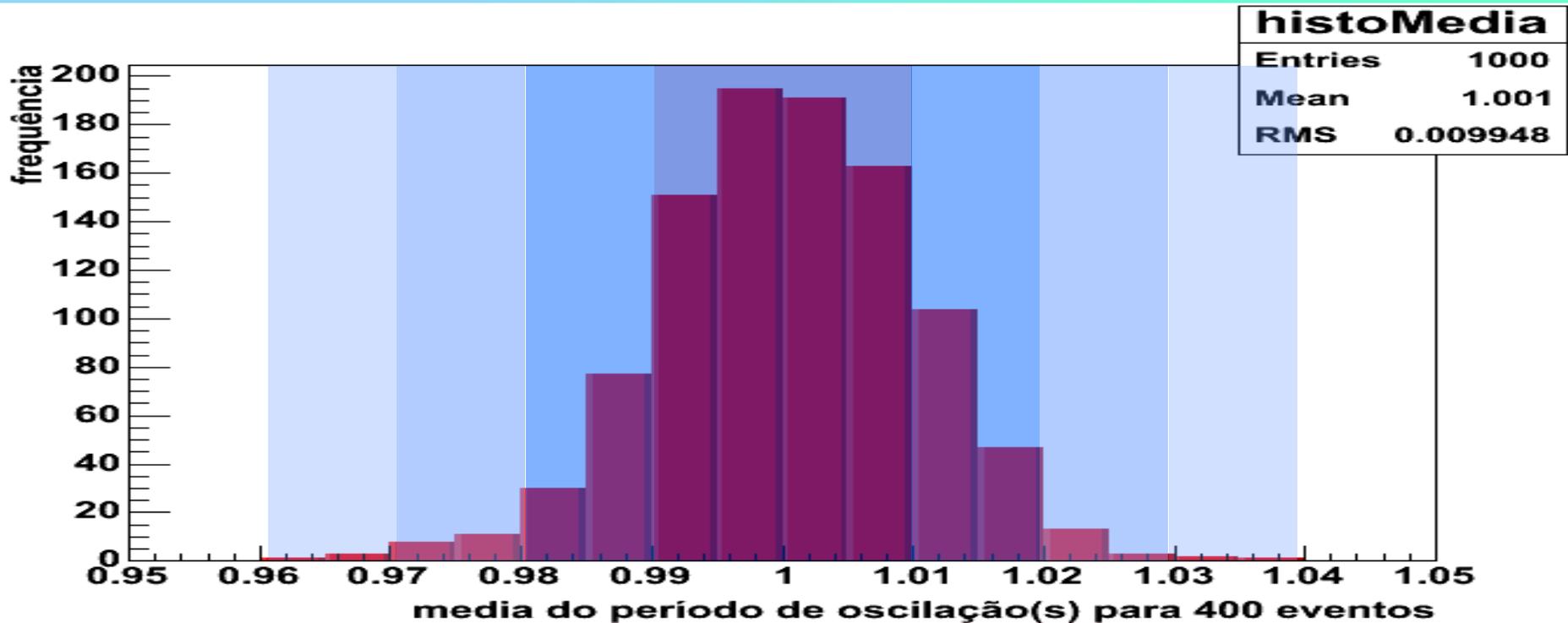
Muito  
Pouco  
Provável

Quase  
Impossível

# Média e Desvio Padrão da Média



# Interpretação Estatística da Média e Desvio Padrão da Média



Quase  
Impossível

Muito  
Pouco  
Provável

Pouco  
Provável

Provável

Muito Provável

Provável

Pouco  
Provável

Muito  
Pouco  
Provável

Quase  
Impossível

# **Incertezas sistemáticas**

**Aquelas que falseiam a medida**

**Ex: uma régua onde o primeiro mm está faltando e o experimentador não percebe**

**Todas as medidas serão 1 mm maiores do que deveriam**

**Ex: uma balança descalibrada e/ou com o zero deslocado**

**Esse tipo de incerteza, em geral, só é percebida quando um resultado difere do esperado**

**Devem ser corrigidas ou refeitas**

# Qual é a incerteza de uma medida?

Várias medidas do tamanho de uma mesa com uma régua

$$\sigma_{L_{instr}} = 0,5 \text{ mm} \qquad \sigma_{L_{estat}}$$

$$\sigma_{L_{final}} = \sqrt{\sigma_{L_{instr}}^2 + \sigma_{L_{estat}}^2}$$

Caso um tipo de incerteza seja dominante, pode-se desprezar a outra.

Período do pêndulo medido com o relógio de pulso  
Incerteza instrumental > estatística

Período do pêndulo medido com cronômetro de 0,01s  
Incerteza estatística > instrumental

# Medida da Densidade de Sólidos

## Objetivo

Identificar os diferentes tipos de plásticos que compõem um conjunto de objetos

## Identificação

Comparação das medidas (+incertezas) com valores tabelados de diferentes tipos de plásticos

## Densidade (materiais sólidos homogêneos)

$$d = m/V$$

Necessário medir a massa e o volume do objeto

# **Procedimento Experimental:**

**Cada aluno da dupla escolhe dois dos cilindros da caixa (anote o número para usar a mesma na próxima aula)**

**Em seguida, determina seu volume fazendo todas as medidas necessárias com uma régua. Cada aluno deve determinar quantas vezes é necessário repetir cada medida**

**Mede sua massa usando a balança digital da sala de aula**

# Análise dos dados

**Calcular a densidade do objeto estudado e sua incerteza**

**Como calcular a incerteza da densidade já que ela não é medida diretamente, mas é obtida através de outras medidas (diâmetro, altura e massa do cilindro)?**

# Cálculo da densidade

A densidade é dada por:

$$d = \frac{m}{V}$$

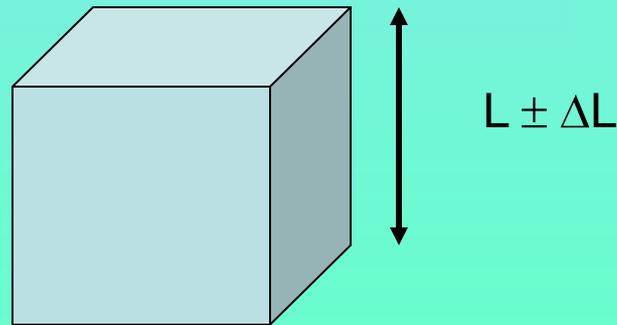
onde, o volume  $V$  é:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot h$$

e  $m$ ,  $h$  e  $D$  são, respectivamente, a massa, a altura e o diâmetro do cilindro.

# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

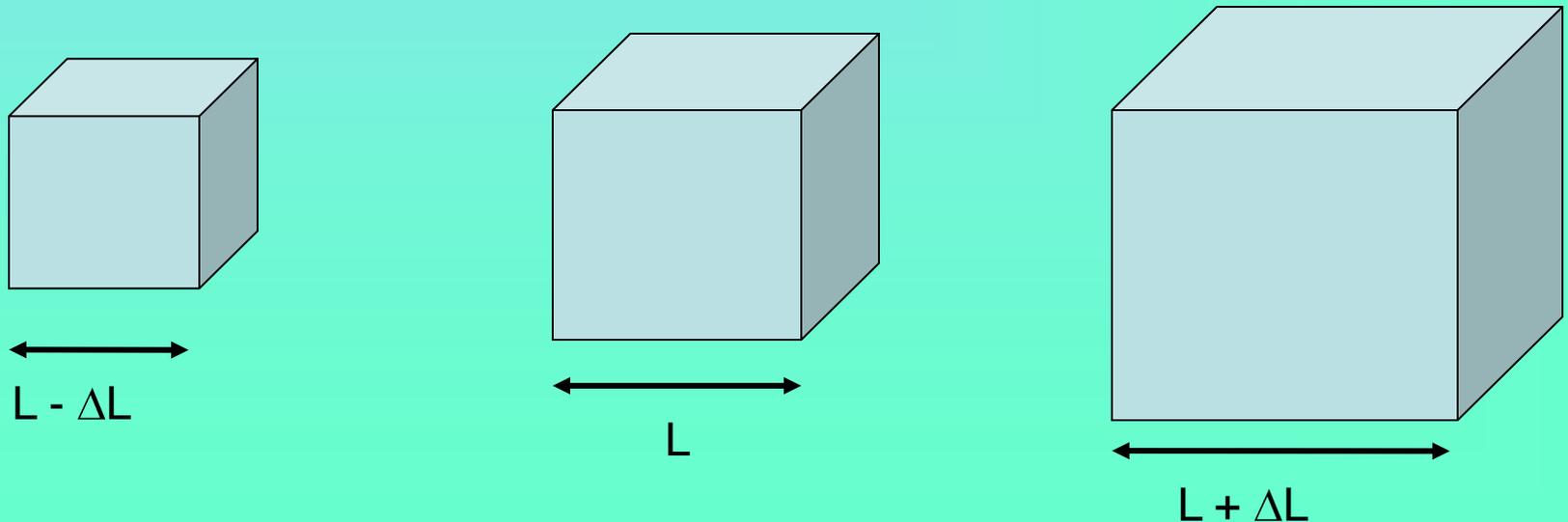
Por exemplo, vamos medir o volume de um cubo. Inicialmente medimos o tamanho de sua aresta com uma régua (que tem incerteza).



# Uma medida obtida de outra medida tem incerteza?

**O volume do cubo tem uma incerteza?**

**A incerteza de uma medida (neste caso, a incerteza na aresta do cubo) se propaga para as medidas obtidas da mesma (o volume do cubo).**



# Como calcular essa incerteza?

Neste exemplo, temos:

$$V = L^3$$

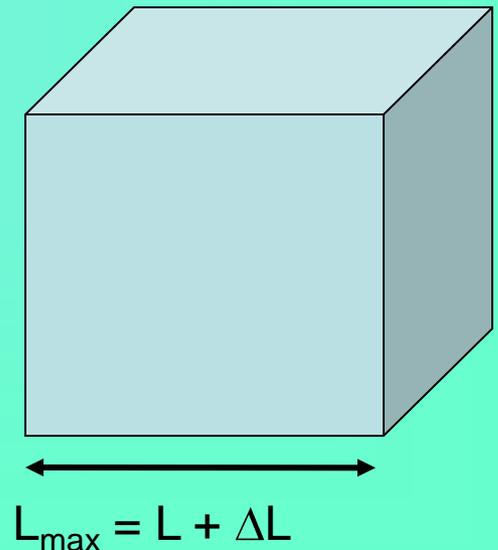
onde:  $(L \pm \Delta L)$  é a aresta do cubo (medido com a régua) e sua incerteza.

A incerteza no volume do cubo será dado pelo comprimento máximo que acreditamos que a aresta pode ter:

$$L_{\max} = L + \Delta L,$$

que leva a:

$$V_{\max} = (L_{\max})^3$$



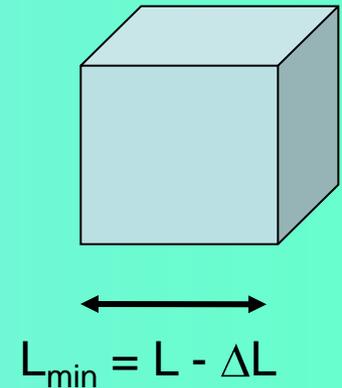
# Como calcular essa incerteza?

e o comprimento mínimo acreditamos que ela possa ter:

$$L_{\min} = L - \Delta L,$$

que leva a um volume mínimo dado por:

$$V_{\min} = (L_{\min})^3$$



Com isso, a incerteza no volume  
pode ser dada inicialmente por:

$$\Delta V = [V_{\max} - V_{\min}] / 2$$

# Propagação de incerteza

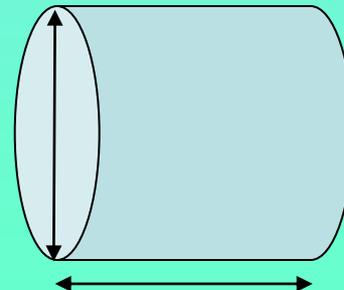
**E se uma grandeza depende de outras duas medidas, como por exemplo, na medida do volume de um cilindro? O que fazer?**

**O volume de um cilindro é dado por:**

$$V = \pi (D/2)^2 h$$

**onde,  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $h$  a sua altura ambos com incerteza**

$D \pm \Delta D$



$h \pm \Delta h$

# Propagação de incerteza

Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

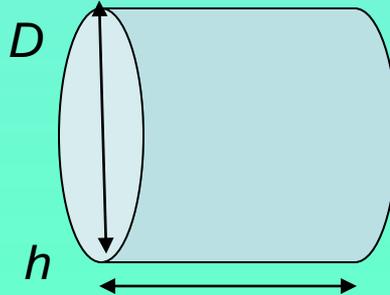
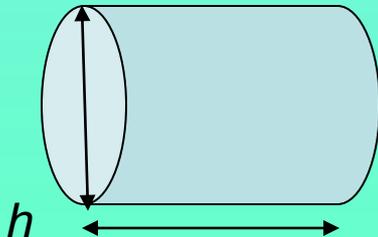
Incerteza no volume devido a incerteza no raio:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D+\Delta D)/2]^2 h$$

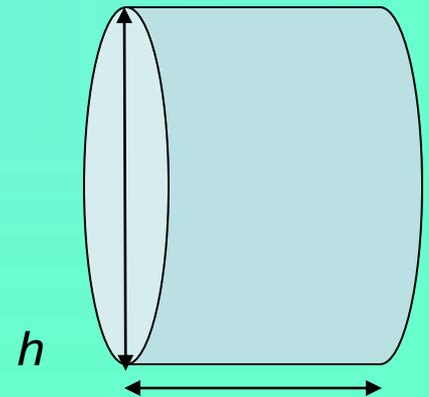
$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta D) = \pi[(D-\Delta D)/2]^2 h$$

$$\Delta V \text{ devido a } \Delta D = (V_{max} - V_{min})/2$$

$D-\Delta D$



$D+\Delta D$



# Propagação de incerteza

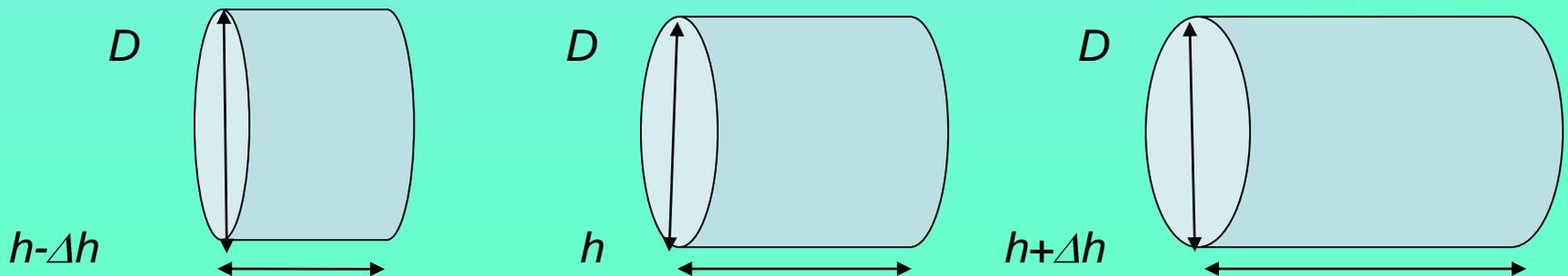
Neste caso iremos calcular a incerteza no volume devido a incerteza no raio e a incerteza no volume devido a incerteza na altura e depois combinar as duas incertezas.

Incerteza no volume devido a incerteza na altura:

$$V_{max} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h+\Delta h)$$

$$V_{min} \text{ (devido a } \Delta h) = \pi(D/2)^2(h-\Delta h)$$

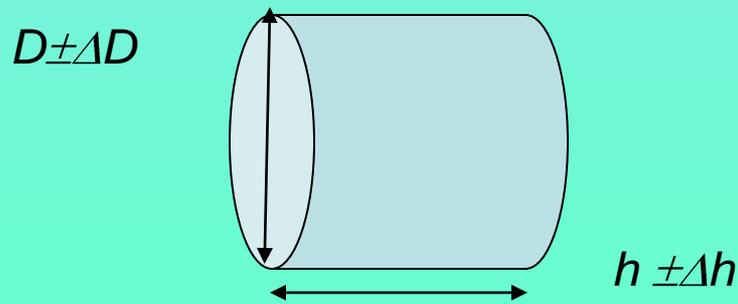
$$\Delta V \text{ devido a } \Delta h = (V_{max} - V_{min})/2$$



# Propagação de incerteza

E combinamos as duas incertezas com uma soma quadrática. Fazemos isso pois assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura:

$$\Delta V^2 = (\Delta V_{\text{devido a } \Delta D})^2 + (\Delta V_{\text{devido a } \Delta h})^2$$



# Cálculo da incerteza do volume do cilindro

A incerteza do volume do cilindro ( $s_V$ ) é dada pela propagação das incertezas do diâmetro ( $s_V^D$ ) e da altura ( $s_V^h$ ), ou seja, a incerteza em  $V$  devido a incerteza em  $D$  e a incerteza em  $V$  devido a incerteza em  $h$ :

E como calcular  $s_V^D$  e  $s_V^h$  ?

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro

Incerteza no volume devido à incerteza no diâmetro

$$V_{D + s_D} = \pi \cdot \left( \frac{D + s_D}{2} \right)^2 \cdot h$$

$$V_{D - s_D} = \pi \cdot \left( \frac{D - s_D}{2} \right)^2 \cdot h$$

$$s_V^D = \frac{1}{2} \frac{\pi h}{4} \left( (D + s_D)^2 - (D - s_D)^2 \right) = \frac{\pi 2Dh}{4} s_D$$

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro

Incerteza no volume devido à incerteza na altura

$$s_V^h = \frac{\pi D^2}{4} \left[ \frac{D^2 + s_h}{2} - \frac{D^2 - s_h}{2} \right] = \frac{\pi D^2}{4} s_h$$

Incerteza no volume devido a incertezas no diâmetro e altura

$$s_V = \frac{(V_+ - V_-)}{2} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{D^2 + s_D}{2} (h + s_h) - \frac{D^2 - s_D}{2} (h - s_h) \right)$$

$$s_V = \frac{\pi 2Dh}{4} s_D + \frac{\pi D^2}{4} s_h$$

# Cálculo da incerteza do volume do cilindro

Como assumimos que a incerteza devido ao diâmetro é independente da incerteza devido à altura, deve-se avaliar a incerteza a partir de uma soma quadrática.

$$s_V = \sqrt{\left(\frac{D}{V}\right)^2 + \left(\frac{h}{V}\right)^2}; \quad s_V = \sqrt{\left(\frac{\pi 2Dh}{4} s_D\right)^2 + \left(\frac{\pi D^2}{4} s_h\right)^2}$$

$$\frac{s_V}{V} = \sqrt{\left(\frac{2s_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{s_h}{h}\right)^2}$$

# Cálculo da incerteza da densidade

A incerteza da densidade ( $s_d$ ) é dada pela propagação das incertezas da massa ( $s_d^m$ ) e do volume ( $s_d^V$ ), ou seja, a incerteza em  $d$  devido a incerteza em  $m$  e a incerteza em  $d$  devido a incerteza em  $V$ :

$$s_d = \sqrt{\left(s_d^m\right)^2 + \left(s_d^V\right)^2}$$

E como calcular  $s_d^m$  e  $s_d^V$  ?

# Cálculo da incerteza da densidade

$$d = \frac{m}{V}$$

$$d \left( m + s_m \right) = \frac{m + s_m}{V}; \quad d \left( m - s_m \right) = \frac{m - s_m}{V}$$

$$s_d^m = \left[ \frac{d \left( m + s_m \right) - d \left( m - s_m \right)}{2} \right]$$

$$s_d^m = \frac{(m + s_m) - (m - s_m)}{2V} = \frac{s_m}{V}$$

# Cálculo da incerteza da densidade

$$d = \frac{m}{V}$$

$$d(V + s_v) = \frac{m}{V + s_v}; \quad d(V - s_v) = \frac{m}{V - s_v}$$

$$s_d^V = \left[ \frac{d(V + s_v) - d(V - s_v)}{2} \right]$$

$$s_d^V = \frac{m(V + s_v) - m(V - s_v)}{2(V + s_v)(V - s_v)} = \frac{2ms_v}{2(V^2 - s_v^2)} = \frac{ms_v}{V^2}$$

# Cálculo da incerteza da densidade

$$s_d = \frac{d_+ - d_-}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(m + s_m)}{(V - s_v)} - \frac{(m - s_m)}{(V + s_v)} \right]$$

$$s_d = \frac{ms_v}{V^2} - \frac{s_m}{V}$$

$$s_d = \sqrt{\left(\frac{m}{d}\right)^2 + \left(\frac{V}{d}\right)^2} \Rightarrow s_d = \sqrt{\left(\frac{ms_v}{V^2}\right)^2 + \left(\frac{s_m}{V}\right)^2}$$

$$\frac{s_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{s_v}{V}\right)^2 + \left(\frac{s_m}{m}\right)^2}$$

# Análise dos dados

- Calcular a densidade do objeto estudado e sua incerteza e colocar os valores na lousa;**
- Comparar as medidas de toda classe a fim de identificar quantos tipos de plástico compõem os objetos estudados;**
- Como comparar e diferenciar os tipos de plástico que compõem os objetos?**

# Análise dos dados

**Que resultados são compatíveis?**

**Como podemos determinar a compatibilidade dos resultados? Qual critério devemos usar?**

**Para fazer isso é preciso compreender o significado da incerteza.**

# Como interpretar o significado da incerteza?

O que significa dizer que minha medida, é  $2,74 \pm 0,02$  mm?

Eu tenho confiança que o valor verdadeiro da grandeza medida está entre  $(2,74 - 0,02)$  e  $(2,74 + 0,02)$

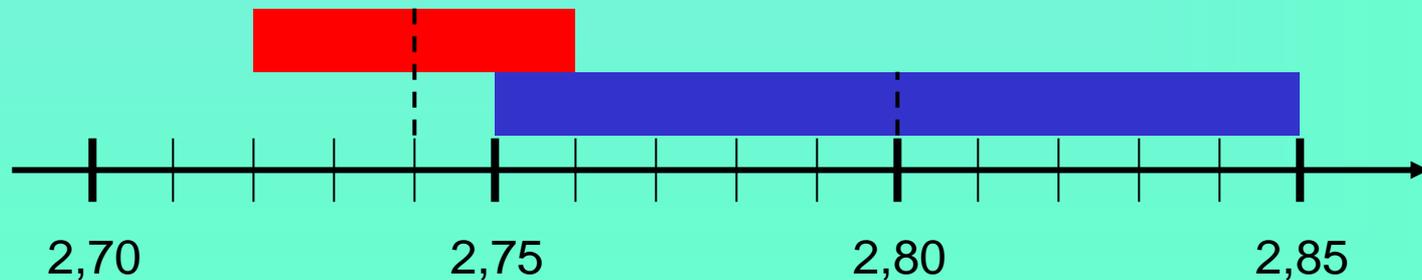


# Como comparar os resultados de duas medidas?

É preciso se levar em consideração sempre a incerteza de medida.

Como devemos considerar a incerteza, nos perguntamos se as medidas são compatíveis ao invés de “iguais”;

Por exemplo,  $2,74 \pm 0,02 \text{ mm}$  é compatível com  $2,80 \pm 0,05 \text{ mm}$  ?



# Compatibilidade

**Incerteza = Intervalo confiança**

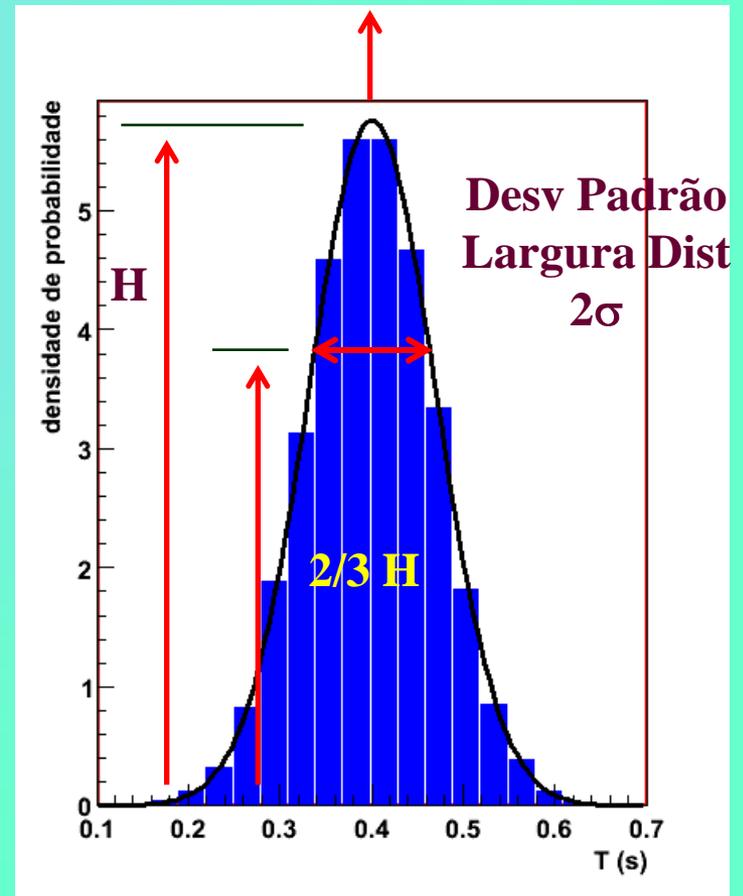
Paralelo com distribuição estatística

$$[M - \sigma; M + \sigma] = 68\%$$

$$[M - 2\sigma; M + 2\sigma] = 95\%$$

$$[M - 3\sigma; M + 3\sigma] = 99,9\%$$

Média  
Valor + provável



# Critério para compatibilidade

Superposição em  $1\sigma$  = compatíveis

Superposição em  $2\sigma$  ou  $3\sigma$

Compatíveis com menor probabilidade

Teste Z indica essa probabilidade

Comparação entre  $(a \pm \sigma_a)$  e  $(b \pm \sigma_b)$

$$Z = \frac{|a - b|}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_b^2}}$$

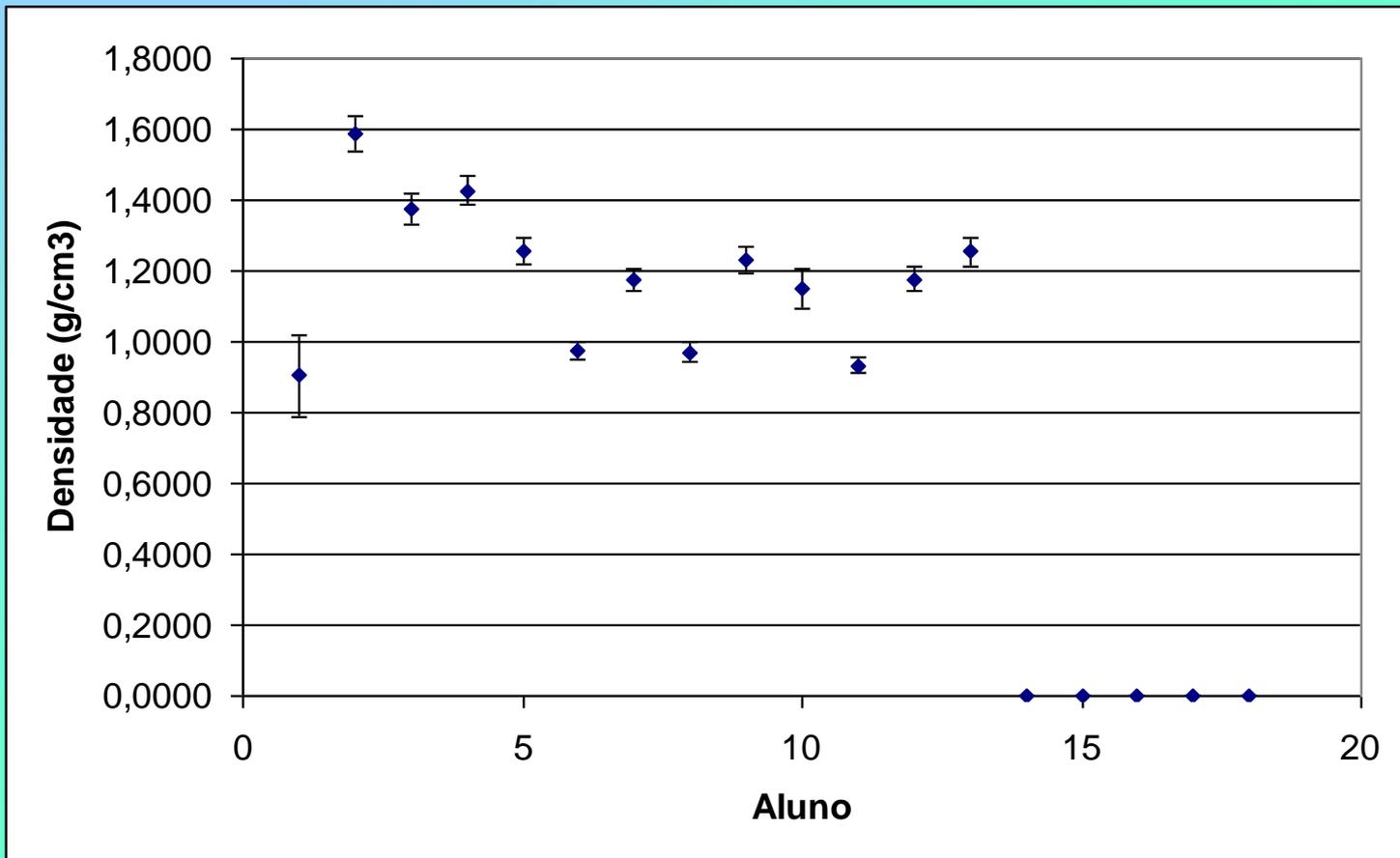
$Z=1$ , compatíveis ao nível de  $1\sigma$

$Z=2$ , compatíveis ao nível de  $2\sigma$

$Z=3$ , compatíveis ao nível de  $3\sigma$

$Z>3$ , discrepantes

# Resultados - Tipos de plástico?



# Conclusões Parciais

**Será que é possível que exista mais tipos de plástico do que aqueles identificados até o momento?**

**Como seria possível saber isso?**

**Melhorando a precisão do experimento, ou seja, diminuindo as incertezas nas densidades.**

**Mas, como?**

# **Procedimento Experimental:**

**Melhorar a medida de massa e a medida do volume dos cilindros**

**Cada aluno da dupla fará novamente a medida da massa, mas desta vez usando uma balança analítica**

# Análise dos dados

**Calcular novamente a densidade do objeto estudado e sua incerteza com as novas medidas;**

**Comparar as medidas de toda classe novamente. Quantos tipos de plástico podem ser identificados desta vez? Que medida permitiu se obter esse resultado?**