PSI-3260 Aplicações de Álgebra Linear

Experiência 9

Método dos Mínimos Quadrados 2 – Desafio

Neste exercício, vamos explorar o método dos mínimos quadrados ponderados (*weighted least-squares*). Seja um conjunto de pontos determinados experimentalmente:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}.$$

Deseja-se obter uma relação matemática entre as variáveis x e y por meio do *ajuste* de uma curva $\hat{y} = f(x)$ aos pontos no plano que correspondem aos vários valores de x e de y. A variância do erro da aproximação dos valores de y pelos valores de $\hat{y}$ é

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k^2 = \frac{(y_1 - \hat{y}_1)^2 + (y_2 - \hat{y}_2)^2 + \cdots + (y_n - \hat{y}_n)^2}{n}. \tag{1}$$

Vimos na Parte Teórica da Experiência 8 que a solução dos mínimos quadrados que minimiza essa variância é dada por[1]

$$\boxed{\mathbf{v}^* = (\mathbf{M}^T\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^T\mathbf{y}.} \tag{2}$$

Suponha agora que as medidas obtidas para os diferentes valores de y não são igualmente confiáveis. Neste caso, é mais adequado ponderar os erros quadráticos em (1) de modo a dar mais importância às medidas mais confiáveis. Denotando esses pesos por w_1^2, w_2^2, $\cdots$, w_n^2, a variância da aproximação se torna

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k^2 e_k^2 = \frac{w_1^2(y_1 - \hat{y}_1)^2 + w_2^2(y_2 - \hat{y}_2)^2 \cdots + w_n^2(y_n - \hat{y}_n)^2}{n}. \tag{3}$$

Se os erros nas medidas de y_k fossem modelados por variáveis aleatórias independentes com médias iguais a zero e variâncias $\sigma_1^2, \cdots, \sigma_n^2$, os pesos $w_k^2 = 1/\sigma_k^2$ seriam adequados para ponderar os erros em (3), ou seja, quanto maior a variância do erro e_k, menor o peso w_k^2.

Este exercício é composto de uma parte teórica e outra experimental, como descrito abaixo.

1. Mostre que a solução dos mínimos quadrados ponderados que minimiza (3) é dada por

$$\boxed{\mathbf{v}^* = [(\mathbf{WM})^T\mathbf{WM}]^{-1}(\mathbf{WM})^T\mathbf{W}\mathbf{y}.} \tag{4}$$

em que $\mathbf{W}$ é uma matriz diagonal com os pesos $w_1, w_2, \cdots, w_n$.

[1] A notação está definida na Parte Teórica da Experiência 8.

2. Modifique a função dos mínimos quadrados da Experiência 8 para aproximação polinomial levando em conta a ponderação.

3. Teste sua função para os dados da tabela abaixo. Nesta tabela, a posição corresponde à altura de um avião a partir da decolagem ($t = 0$). Note que a altura aumenta com o tempo até 12 s. No intervalo entre 13 s e 17 s, o avião entra em turbulência e as medidas não são confiáveis e por isso devem ser ponderadas por um valor menor. A partir de 18 s, o avião volta à condição normal e as medidas voltam a ser confiáveis. Use um polinômio de ordem 6 que melhor se ajusta aos dados da tabela seguindo o método dos mínimos quadrados e o método dos mínimos quadrados ponderados. Calcule a variância do erro das duas aproximações e compare.

tempo (s)	posição (metros)	ponderação
0	0	1
1	2,6822	1
2	9,1135	1
3	18,8976	1
4	31,9126	1
5	48,4937	1
6	67,6656	1
7	89,7636	1
8	115,9459	1
9	143,5913	1
10	174,2542	1
11	209,2757	1
12	246,6442	1
13	178,2166	0,1
14	206,1972	0,1
15	184,5869	0,1
16	245,1811	0,1
17	154,0459	0,1
18	227,7770	1
19	305,8668	1
20	372,2827	1
21	474,1164	1