PSI 3211 - Circuitos Elétricos I
Profa. Elisabete Galeazzo

Tópicos da aula:

1) REVISÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

2) DEFINIÇÃO DE FASORES

Revisão de Números Complexos

- Número imaginário $\rightarrow$ notação usual em Engenharia: **$j = \sqrt{-1}$**

. Número complexo **z** é composto por:

$\rightarrow$ Parte real e parte imaginária:

$\rightarrow$ **z= a + jb**

$\rightarrow$ sendo Re{z} = **a**

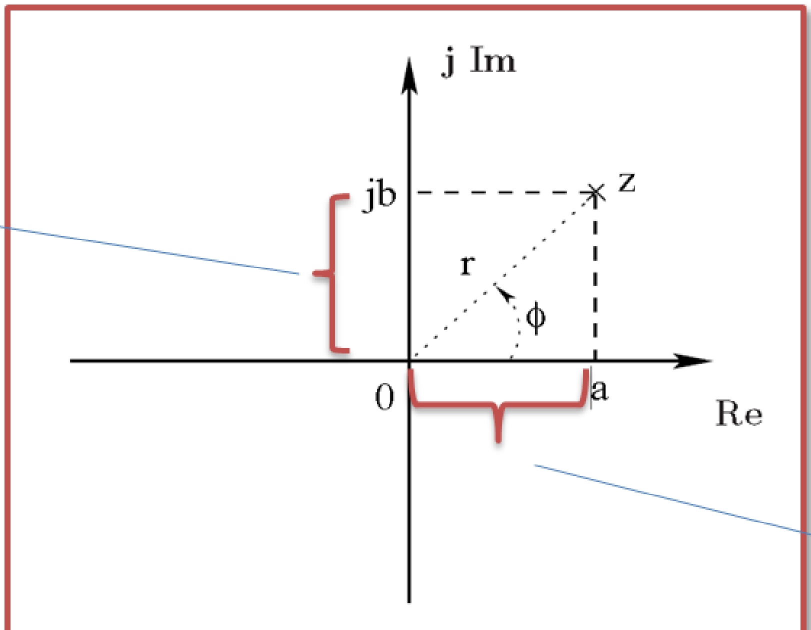
$\rightarrow$ e Im{z} = **b**

$\rightarrow$ Complexo conjugado: **z* = a -jb**

Representação Gráfica de um Número Complexo no Plano Complexo

z = a + jb

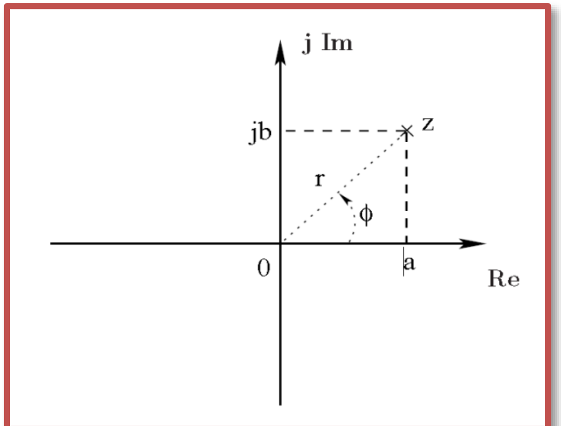
Eixo das ordenadas: parte imaginária



Eixo das abcissas: parte real

Coordenadas retangulares e polares

O ponto **z** no plano complexo pode ser representado como:



$$\boldsymbol{z = r\,|\underline{\emptyset}}$$

Em **coordenadas retangulares** temos:

$$\boldsymbol{z = a + jb}$$

Em **coordenadas polares** temos:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = r.\cos(\emptyset)$$
$$b = r.sen(\emptyset)$$
$$\emptyset = \arctan(b, a)$$

A função arctan2(b,a) ou arctg2(b,a)

- A função arctan (ou arctg) usual não diferencia pontos do 1º quadrante de pontos simétricos do 3º quadrante!
- Ela também não diferencia pontos do 2º quadrante de pontos simétricos do 4º quadrante.

Exemplo:
Dado z = 1 + j1, quanto vale o arctan(1,1)?

Resposta = 45º

Dado z = -1 - j1, quanto vale o arctan(-1,-1)?

Resposta = 45º ←resposta errada !!!!!

Sabemos que deveria ser 225º ou -135º

A função arctan2(b,a) ou arctg2(b,a)

$$\phi = \text{arctan2 (b, a)} \begin{cases} = \text{arctan(b, a)}, & \text{se a} > 0 \\ = \text{arctan(b, a)} - \text{sinal (b/a)}.180^{o}, & \text{se a} < 0, \\ = 90^{o}, & \text{se a} = 0 \text{ e } b > 0 \\ = -90^{o}, & \text{se a} = 0 \text{ e } b < 0 \\ = 0, & \text{se a} = b = 0 \end{cases}$$

Exemplo:

a = -1 e b = -1 $\Rightarrow$ assim temos que: ϕ = arctan(-1, -1) - (-1/-1).180º $\Rightarrow$

$$\phi = 45^{o} - 180^{o} = -135^{o}$$

Operações com números complexos

Soma e subtração

Dica:

OPTE POR COORDENADAS RETANGULARES

Exemplo:

$z_1 = a_1 + jb_1$

$z_2 = a_2 + jb_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$

Produto e divisão

Dica:

OPTER POR COORDENADAS POLARES

Exemplo:

$z_1 = \boldsymbol{r_1}|\underline{\boldsymbol{\emptyset_1}}$ e $z_2 = \boldsymbol{r_2}|\underline{\boldsymbol{\emptyset_2}}$

$z_1 . z_2 = r_1 . r_2 \,|\underline{\phi_1 + \phi_2}$

Série de Maclaurin

A série de Taylor de uma função **f(x)** em torno de "**a**" é:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} c_n (x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

Para o caso especial de **a = 0**, a função **f(x)** torna-se uma série de Maclaurin:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \end{aligned}$$

Representação das funções: seno, co-seno e exponencial em série de Maclaurin

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 \cdots$$

Se considerarmos o expoente ***z* = j x**, temos:

$$\boxed{e^{jx} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} \ldots\ldots = \cos(x) + j\,\mathrm{sen}(x)}$$

Representação Exponencial de um número complexo

Dado o número complexo **z = a + jb**;

Como $a = r.\cos(\emptyset)$ e $b = r.sen(\emptyset)$

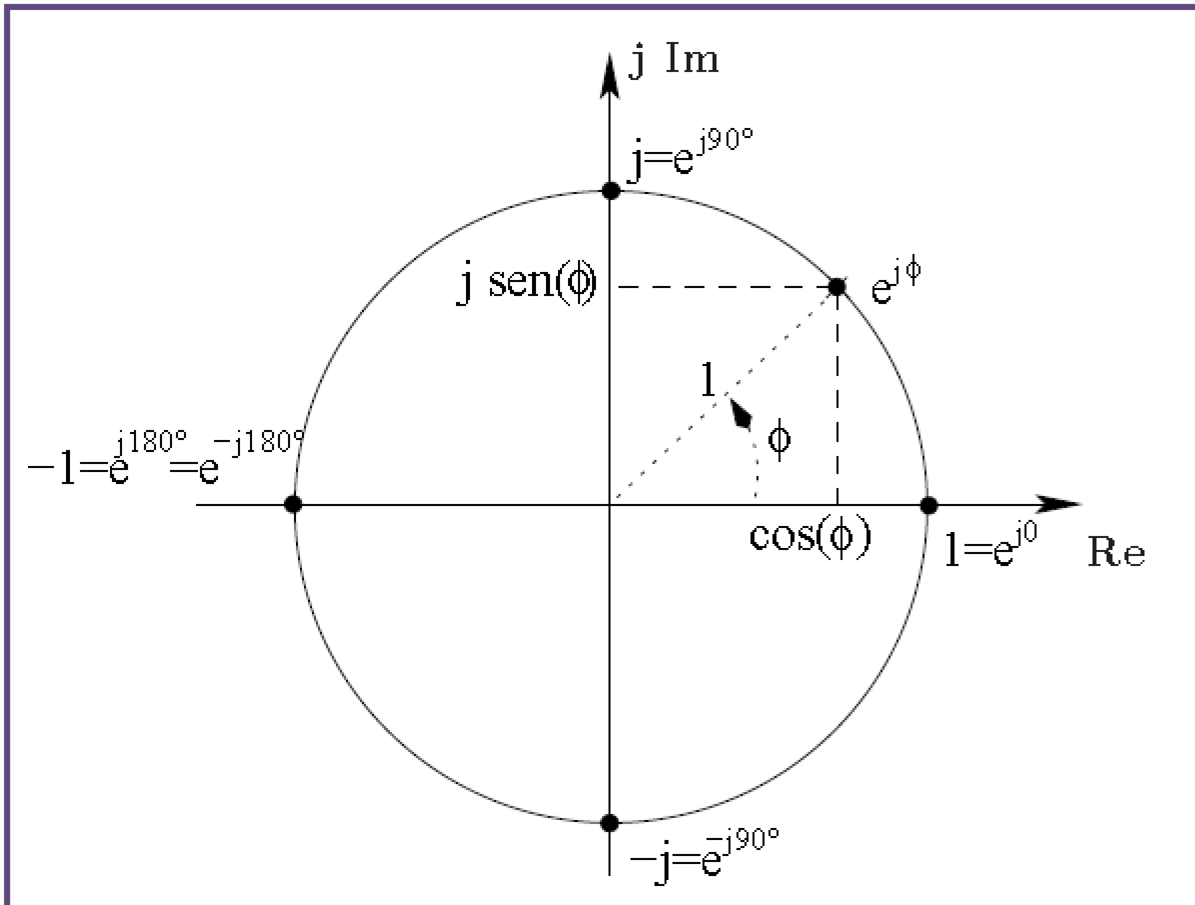
Temos que $\rightarrow$ z = r.$(\cos(\emptyset)$ + j $sen(\emptyset))$

Logo: **z = r e $^{j\phi}$** $\longleftarrow$ representação exponencial de um número complexo, muito útil para C.E.!!!!

Note que $|\ e^{j\phi}\ | = \sqrt{cos\phi^2 + sen\phi^2} = 1,$

para qualquer ϕ.

Círculo unitário e o valor de $\mathbf{e}^{j\phi}$ no plano complexo



Fórmulas de Moivre

- Funções senos e co-senos podem ser escritas em função da forma exponencial complexa:

$$\boxed{\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} = \mathcal{R}e\{e^{j\phi}\}}$$

$\Rightarrow$ **$z_1 + z_1^* = 2\,Re\,\{z_1\}$**

$$\boxed{\text{sen}(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j} = \mathcal{I}m\{e^{j\phi}\}}$$

$\Rightarrow$ **$z_1 - z_1^* = 2\,Im\,\{z_1\}$**

Definição de fasor

- $i_o(t) = I_o.\cos(\omega t + \theta) \Rightarrow i_o(t) = \mathfrak{R}\{I_o\,.e^{j\theta}\ .\ \mathbf{e^{j\omega t}}\}$

  $i_1(t) = I_1.\cos(\omega t + \theta_1) \Rightarrow i_1(t) = \mathfrak{R}\{I_1\,.e^{j\theta_1}\ .\ \mathbf{e^{j\omega t}}\}$

  $i_2(t) = I_2.\cos(\omega t + \theta_2) \Rightarrow i_2(t) = \mathfrak{R}\{I_2\,.e^{j\theta_2}\ .\ \mathbf{e^{j\omega t}}\}$

  Assumindo que $i_o(t) = i_1(t) + i_2(t)$ temos então:

$$\mathfrak{R}\{\underbrace{I_o\,.e^{j\theta}}_{\hat{I}_o}.\ \mathbf{e^{j\omega t}}\} = \mathfrak{R}\{(\underbrace{I_1\,.e^{j\theta_1}}_{\hat{I}_1} + \underbrace{I_2\,.e^{j\theta_2}}_{\hat{I}_2}).\ \mathbf{e^{j\omega t}}\}$$

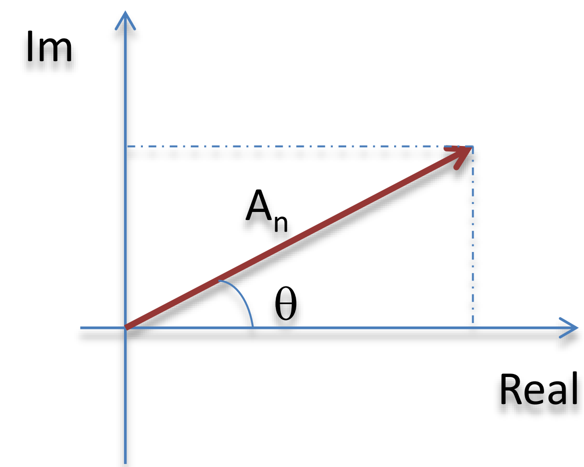
$$\boxed{\hat{I}_o = \hat{I}_1 + \hat{I}_2}$$

Fasor

- $f(t) = A_n.\mathbf{cos}\,(\omega t + \theta\,)\,;\, A_n \geq 0$ e θ = graus

O fasor associado à função f(t) será:

$$\hat{F} = A_n\,.e^{\,j\theta} = An\,\angle\theta$$



Note que a função **f(t)** deve:

☞ ter **amplitude positiva**

☞ e ser **co-senoidal**