Universidade de São Paulo

Instituto de Física da USP

Física I para a Escola Politécnica 2016

Uma volta no carrossel

Uma criança de 25 kg, em um playground, corre com uma velocidade escalar inicial de $2,5$ m/s em uma trajetória tangente à borda de um carrossel, cujo raio é R =2 m. O carrossel, inicialmente em repouso, tem um momento de inércia de 500 $\mathrm{kg\,m^2}$. A criança pula no carrossel (Fig. 1). Determine a velocidade angular final do conjunto criança mais carrossel (dicas: faça substituições numéricas apenas na etapa final da solução. Considere a massa dos braços do carrossel desprezível com respeito à sua massa total e trate a criança durante todo o tempo como uma partícula pontual e com centro de massa na mesma altura que o disco do carrossel.)

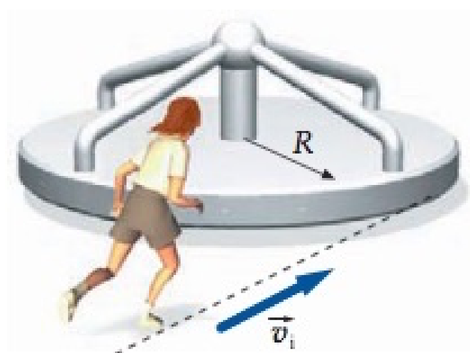

Figure 1:

Solução comentada

Consideremos o sistema criança-carrossel.

Comentário: é muito importante definir o sistema que é considerado. Como dica é conveniente que seja a primeira coisa a ser especificada na resolução. Outra possibilidade é o fazer logo antes de aplicar algum teorema de conservação.

No sistema de coordenadas xyz da Fig. 2, o carrossel gira em torno do eixo z, que é um eixo que passa perpendicularmente por O (o centro geométrico do carrossel).

Comentário: é importante fazer um desenho e definir um sistema de coordenadas.

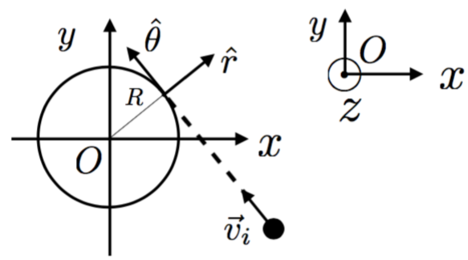

Figure 2: Vista do carrusel desde cima.

Consideremos o ponto O como o ponto de referência para calcular o momento angular e os possíveis torques externos. Para o sistema criança+carrossel, a força externa resultante antes do salto é nula. Após o salto, estando carrossel e criança ambos girando com um velocidade angular comum em torno do eixo z, a força externa resultante deixa claramente de ser nula, já que é do tipo centrípeta. Ainda assim, após o salto, o torque resultante com respeito a O é nulo, já que a força é do tipo central para essa origem.

Como conseqüência, a componente do momento angular do sistema com respeito a O ao longo do eixo z, por exemplo, é conservada: pode ser calculada em qualquer instante de tempo.

Comentário: Observe a importância de se definir o sistema físico em consideração. O momento angular é conservado para o sistema criança+carrossel mas não, por exemplo, para o carrossel ou para a criança isoladamente. A lei de conservação em questão só é válida no sistema físico considerado onde não haja forças externas capazes de produzir torque com respeito a um dado ponto. Você há de explicar esse fato na sua resolução. Igualmente importante é a escolha do ponto com respeito ao qual quantidades vetoriais como momento angular e torque serão calculadas. Veja quadro explicativo mais adiante a respeito das diferenças esperadas nessas quantidades para uma escolha distinta de ponto de referência.

Em qualquer instante de tempo, o momento angular do sistema em relação ao ponto O é

$$\vec{L} = \vec{L}_C + \vec{L}_{CR}, \tag{1}$$

onde $\vec{L}_C$ e $\vec{L}_{CR}$ são os momentos angulares em relação a O do carrossel e da criança, respectivamente.

Comentário: Note que o sistema físico tem dois sub-sistemas, cada um com o seu momento angular.

Comentário: ao introduzir novos “símbolos", como $\vec{L}_C$ e $\vec{L}_{CR}$, explique sempre o que representa.

Vamos a considerar dois instantes de tempo para aplicar a conservação do momento angular do sistema: (1) imediatamente antes da criança fazer contato com o carrossel (instante i) (2) Num instante posterior em que a criança já se encontra sobre o carrossel e girando com ele (instante f).

Comentário: é importante que escreva em que instantes você determiná o momento angular do sistema.

No instante i, $\vec{L}_{C,i} = 0$ (o carrossel está em repouso). A criança pode ser considerada como uma partícula pontual de massa m, com vetor posição em relação a O dado por $\vec{r}_{CR,i} = R\hat{r}$ e velocidade $\vec{v}_i = v_i\hat{\theta}$, onde $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$ são os versores em coordenadas polares (Fig. 2). Assim, da Eq. (1)

$$\vec{L}_i = \vec{L}_{CR,i} = \vec{r}_{\mathrm{CR,i}} \times [m\vec{v}_i] = Rmv_i(\hat{r} \times \hat{\theta}) = Rmv_i\hat{k}. \tag{2}$$

e somente temos componente z. Portanto, essa componente há de ser conservada.

Comentário: observe como o uso de coordenadas polares simplica o cálculo do produto vetorial. Outra possibilidade seria usar coordenadas cartesianas para os vetores posição e velocidade, o que demandaria mais tempo na resolução.

No instante f o sistema criança+carrossel gira ao redor do eixo z com velocidade angular $\vec{\omega}_f = \omega_f\hat{k}$. Tomamos o carrossel como um disco homogêneo.

Comentário: É importante que você escreva esta aproximação, pois a determinação do momento de inércia do carrossel está totalmente ligada a ela.

Nesse caso, o eixo z é um eixo de simetria do disco, e o momento angular do sistema criança-carrossel em relação a O é

$$\vec{L}_f = \vec{L}_{CR,f} + I_{\mathrm{C}}\vec{\omega}_f = m[\vec{r}_f \times \vec{v}_f] + I_{\mathrm{C}}\omega_f\hat{k}, \tag{3}$$

Comentário: note que o momento angular do carrossel pode ser escrito como $I\vec{\omega}$ somente porque o eixo de giro é um eixo de simetria. Essa explicação deve constar na sua resolução do problema.

onde I_{C} é o momento de inércia do carrossel em relação ao eixo z e, novamente, a criança no carrossel é interpretada como uma partícula pontual de massa m com vetor posição em relação a O dado por $\vec{r}_f = R\hat{r}$ e velocidade linear $\vec{v}_f$. Como a criança no carrossel gira em torno ao eixo z com velocidade angular $\vec{\omega}_f = \omega_f \hat{k}$, temos que

$$\vec{v}_f = \vec{\omega}_f \times \vec{r}_f = \omega_f R(\hat{k} \times \hat{r}) = R\omega_f \hat{\theta} \tag{4}$$

e substituíndo esta expressão na Eq. (3) obtemos

$$\vec{L}_f = mR^2\omega_f(\hat{r} \times \hat{\theta}) + I_{\mathrm{C}}\omega_f\hat{k} = [mR^2 + I_{\mathrm{C}}]\omega_f\hat{k}. \tag{5}$$

Comentário: Perceba que o momento angular $\vec{L}_f$ do sistema carrossel (C)+criança (CR) obtido é paralelo a $\vec{\omega}_f$, ainda que o eixo z seja um eixo de simetria somente para o carrossel e não para o sistema carrossel+criança. Além disso, estamos obtendo que $\vec{L}_f = \vec{L}_{\mathrm{C,f}} + \vec{L}_{\mathrm{CR,f}} = I_{\mathrm{sistema,z}}\vec{\omega}_f$, onde $I_{\mathrm{sistema,z}} = I_{\mathrm{C}} + I_{\mathrm{CR}} = I_{\mathrm{C}} + mR^2$ é o momento de inércia do sistema carrossel+criança em relação ao eixo de giro (eixo z). Como já dito anteriormente, o vetor momento angular do carrossel em relação ao eixo z é paralelo a $\vec{\omega}_f$, $\vec{L}_{\mathrm{C,f}} = I_{\mathrm{C}}\vec{\omega}_f$, pois o eixo de giro é um eixo de simetria para o carrossel. Entretanto, o vetor momento angular da criança, $\vec{L}_{\mathrm{CR},f}$, não têm por que ser paralelo a $\vec{\omega}_f$. Então, qual a razão para obtermos $\vec{L}_f = I_{\mathrm{sistema,z}}\vec{\omega}_f$ e $\vec{L}_{\mathrm{CR},f} = I_{\mathrm{CR}}\vec{\omega}_f$? Isso é uma consequência da escolha particular do ponto O em relação ao qual calculamos $\vec{L}$. Ao fazê-la, tornamos o vetor $\vec{r} \times m\vec{v_f}$ paralelo ao eixo z, ou seja, paralelo à velocidade angular $\vec{\omega_f}$ do sistema. Além disso, estando a criança de massa m a uma distância R do eixo de rotação, sua contribuição ao momento de inércia do sistema é mR^2. Lembre-se também que o momento angular de um sistema de partículas só é independente do ponto de referência naqueles referenciais onde o centro de massa do sistema está parado, o que não é o caso aqui (nem antes, nem depois da colisão). Sendo assim, se tivéssemos escolhido um ponto de referência diferente de O, por exemplo, um ponto O' sobre o eixo z acima ou abaixo de O, o momento angular total, devido à contribuição da criança adquiriria uma componente adicional no plano xy (certifique-se disso!). Nesse caso, a força centrípeta, responsável por fazer com que o sistema gire em torno do eixo z, deixaria de ser central, passando a exercer um torque não-nulo com respeito a O'. Esse torque seria responsável por fazer o momento angular total do sistema girar em torno do mesmo eixo z com velocidade angular $\vec{\omega}_f$.

A conservação da componente do momento angular ao longo do eixo de giro estabelece que $\vec{L}_i = \vec{L}_f$. Das Eq. (2) e (5) temos

$$Rmv_i = (I_{\mathrm{C}} + mR^2)\omega_f \tag{6}$$

Do enunciado do problema sabemos que, $I_{\mathrm{C}} = 500$ kg m^2, $m = 25$ kg, $R = 2$ m e $v_i = 2,5$ m/s. Assim, da Eq. (6)

$$\omega_f = \frac{m v_i R}{I_{\mathrm{C}} + mR^2} = 0,21 \text{ rad/s} \tag{7}$$

Comentário: note que o sinal de ω_f saiu da dinâmica do problema. Como o valor de ω_f é positivo, quando a criança pula no carrossel o giro do sistema, pela regra da mão direita, é no sentido anti-horário. Tente deduzir que se a criança saltar na direção inversa ω_f seria negativo.