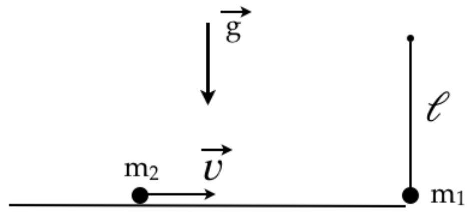
Uma bola 1 de raio desprezível e massa $m_1 = 0,3$ kg encontra-se supensa na extremidade de um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento $\ell = 0,1$ m. Ela é atingida por uma bola 2, também de raio desprezível, de massa $m_2 = 0,1$ kg que desloca-se com velocidade $v = 10$ m/s, sobre uma canaleta horizontal, cuja extremidade encontra-se na posição da bola 1, como ilustrado na figura. A colisão é elástica.



a) Determine os vetores velocidade das bolas imediatamente após a colisão.

b) Determine o vetor velocidade da bola 1 no topo da trajetória.

c) Calcule a tensão no fio quando a bola 1 está no topo da trajetória.

d) Calcule o vetor momento angular do sistema formado pelas duas bolas em relação ao ponto de suspensão da bola 1 antes e imediatamente após a colisão.

SOLUÇÃO COMENTADA

a) Primeiramente, tomaremos como sistema o conjunto formado pelas duas bolas. Logo, a força resultante total sobre o sistema "bola 1+bola 2" é nula antes da colisão e imediatamente após a colisão (nesses instantes, a normal $\vec{N}$ cancela a força peso $\vec{P}_2$ para a bola 2 e a tensão $\vec{T}$ no fio cancela o peso $\vec{P}_1$ da bola 1).

Como trata-se de colisão elástica, podemos aplicar conservação de momento ($\vec{p}_i = \vec{p}_f$) e energia cinética ($K_i = K_f$) para os instantes imediatamente antes e imediatamente após essa colisão (quando pode-se desprezar a variação de energia potencial da massa m_1).

> Perceba a importância de se definir, antes de mais nada, quem é o seu sistema. Só depois que ele estiver definido, poderemos dizer se há ou não conservação do momento linear, já que a lei de conservação em questão afirma que *o momento linear total de um sistema fechado (isolado de forças externas) se conserva.* Para determinar se uma força é interna ou externa, é preciso que o sistema esteja definido de antemão. Nesse caso particular, se tomássemos como sistema aquele formado por apenas uma das bolas, obviamente o momento linear não se conservaria, dado que a outra bola passa a exercer, durante a colisão, uma força externa que contribui à força resultante total sobre o sistema. Sendo assim, frases do tipo "Dado que o momento se conserva..." sem menção explícita aos sistemas às quais elas se aplicam não são aceitas como uma justificativa completa para qualquer cálculo que você venha a desenvolver em seguida. Lembre-se disso!

Para prosseguir com os cálculos, nesse ponto é preciso que o sistema de referência seja definido. Adotaremos um sistema de coordenadas cartesianos com eixos x e y orientados como na figura abaixo, cuja origem coincide com a posição inicial da bola

1. Nesse sistema de coordenadas, $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ são as velocidades, paralelas à canaleta, imediatamente após a colisão:

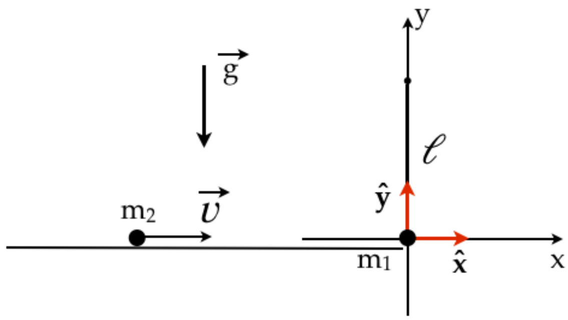
$$\vec{v}_{1f} = v_{1f}\,\hat{x} \quad \text{e} \quad \vec{v}_{2f} = v_{2f}\,\hat{x}$$

Conservação de momento linear implica então:

$$m_2 v\,\hat{x} = m_1 v_{1f}\,\hat{x} + m_2 v_{2f}\,\hat{x},$$

o que implica

$$m_2 v = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (1)$$



enquanto conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (2)$$

De modo que a solução desse sistema de duas equações nos dá

$$v_{2f} = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right) v = -5 \text{ m/s} \quad ; \quad v_{1f} = \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_1}\right) v = 5 \text{ m/s}$$

No sistema de referência cartesiano da figura acima temos então:

$$\vec{v}_{2f} = -5\,\hat{x} \text{ (m/s)} \quad ; \quad \vec{v}_{1f} = 5\,\hat{x} \text{ (m/s)}$$

O sistema de referência adotado por você deve estar explícito na sua solução, com os eixos cartesianos claramente representados, juntamente com os versores associados.

b) De acordo com o teorema do trabalho-energia cinética, o trabalho total realizado pelas forças atuantes sobre a bola de massa m_1 após a colisão ($\vec{P}$ e $\vec{T}$) deve ser igual à variação de energia cinética dessa bola entre os pontos final e inicial do percurso em questão.

É importante notar que está implícita na afirmação anterior uma mudança na definição do sistema. Ele agora é formado apenas pela bola 1, já que o trabalho e a variação da energia cinética dizem respeito a esse corpo. Essa é outra forma aceitável de definição de sistema, ou seja, mencionando em relação ao que o trabalho, a energia cinética, o momento, etc, dizem respeito. Aqui, a definição de sistema como sendo apenas a bola 1 implica que após a colisão as forças que contribuem para o trabalho total são peso e tensão.

Podemos escrever dessa forma para a bola 1:

$$W_{tot} = W_P + W_T = \int_i^f m\vec{g} \cdot d\vec{r} + \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{r} = W_P = \int_i^f (-mg\hat{y}) \cdot d\vec{r} = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mgh$$

onde usou-se o fato de que a tensão $\vec{T}$ é sempre perpendicular ao vetor deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$, e tomou-se pontos final e inicial separados por uma distância vertical $y_f - y_i = h$.

> Escreva o deslocamento infinitesinal $d\vec{r}$ em termos das suas componentes cartesianas para o caminho circular percorrido pela bola 1 e se convença da pertinência da penúltima passagem matemática!

Caso toda a energia cinética fosse convertida em energia potencial, a altura máxima atingida seria $h_{max} = \frac{v^2}{8g} = 1,25$ m $> 2\ell$, de modo que a massa m_1 atinge a altura $h = 2\ell$ com velocidade

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{v^2 - 16g\ell} = \sqrt{21} \text{ m/s}$$

de forma que no sistema de referência adotado aqui, tem-se

$$\vec{V} = -\sqrt{21}\,\hat{x} \text{ (m/s)}$$

> Nada te impede, entretanto, de manter a mesma definição de sistema do item a). Refaça os cálculos com essa definição.

> Note que, nesse item, simplesmente invocar a lei de conservação da energia mecânica, aplicando-a aos pontos inicial e final da trajetória, não é considerada uma justificativa completa, apesar de levar à solução correta. A força peso é sabidamente uma força conservativa, mas ela não é a única a atuar sobre a bola 1 durante o movimento, de modo que é o teorema do trabalho-energia cinética que deve ser usado. Nesse caso específico, o fato da tensão $\vec{T}$ não realizar trabalho, simplifica o problema, mas isso deve estar devidamente justificado na solução.

> Perceba finalmente que a integral W_P acima, feita ao longo do caminho circular desde o ponto mais baixo no nível da canaleta até o ponto mais alto $h = 2\ell$, depende apenas do ponto final (através de y_f) e inicial (através de y_i). Essa é uma consequência direta da natureza conservativa da força peso $m\vec{g}$, cuja integral ao longo de um caminho C qualquer no espaço não depende da forma particular deste, mas apenas dos pontos final e inicial.

c) A força resultante no topo da trajetória deve ser a força centrípeta responsável pela massa m_1 mover-se num círculo de raio ℓ. Logo

$$\vec{T} + \vec{P} = \vec{F}_{cp} \Longrightarrow -T\,\hat{y} - mg\,\hat{y} = -m\left(\frac{V^2}{\ell}\right)\hat{y}$$

Logo

$$T = m_1\left(\frac{V^2}{\ell} - g\right) = 60 \text{ N}$$

d) Imediatamente antes da colisão e no sistema cartesiano adotado, podemos escrever o vetor momento angular como

$$\vec{L}_a = \vec{L}_{1a} + \vec{L}_{2a} = (\vec{0}) \times (\vec{0}) + (\vec{0}) \times (m_2 v\,\hat{x}) = \vec{0}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

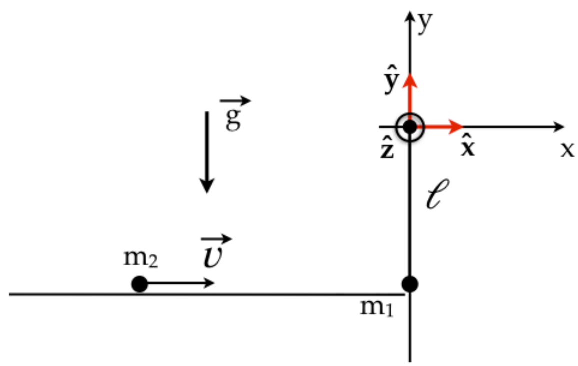
ou seja, no sistema de referência adotado, o vetor momento angular total imediatamente antes da colisão é nulo, bem como os vetores momento angular de cada bola separadamente.

Analogamente, podemos escrever para o instante imediatamente posterior à colisão,

$$\vec{L}_d = \vec{L}_{1d} + \vec{L}_{2d} = (\vec{0}) \times (m_1 v_{1f}\,\hat{x}) + (\vec{0}) \times (-m_2 v_{2f}\,\hat{x}) = \vec{0}\ \text{kg m}^2/\text{s}$$

Veja que o momento angular total de um sistema de dois corpos é a soma vetorial dos momentos angulares de cada corpo. No sistema de referência adotado, os vetores posição das bolas imediatamente antes e imediatamente após a colisão são nulos, o que anula de imediato os respectivos momentos angulares.

Façamos então esse mesmo cálculo em outro sistema de referência, por exemplo, com a origem colocada no ponto de suspensão do fio e mantendo a mesma orientação dos eixos cartesianos como mostrado na figura ao lado.



Temos então para o momento angular antes da colisão:

$$\vec{L}_a = \vec{L}_{1a} + \vec{L}_{2a} = (-\ell\,\hat{y}) \times (\vec{0}) + (-\ell\,\hat{y}) \times (m_2 v\,\hat{x}) = m_2 v \ell\,\hat{z} = 0,1\,\hat{z}\ (\text{kg m}^2/\text{s})$$

e após a colisão:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_d = \vec{L}_{1d} + \vec{L}_{2d} &= (-\ell\,\hat{y}) \times (m_1 v_{1f}\,\hat{x}) + (-\ell\,\hat{y}) \times (-m_2 v_{2f}\,\hat{x}) \\
&= m_1 v_{1f} \ell\,\hat{z} - m_2 v_{2f} \ell\,\hat{z} \\
&= \ell (m_1 v_{1f} - m_2 v_{2f})\,\hat{z} \\
&= 0,1\,\hat{z}\ (\text{kg m}^2/\text{s})
\end{aligned}$$

E novamente o momento angular inicial é igual ao momento angular final.

O fato de que $\vec{L}_a = \vec{L}_d$ nesse caso não é uma simples coincidência, mas uma consequência direta da lei de conservação do momento angular em sistemas sobre os quais o torque resultante $\vec{\tau}_R$ é nulo.

Aqui, as forças externas agindo sobre m_2 (peso e normal) se anulam, enquanto imediatamente após a colisão o mesmo vale para o peso e a tração sobre m_1. As forças atuando em ambas as massas durante o curto período de duração da colisão são forças internas e não podem, portanto, alterar o momento angular total do sistema.

Para certificar-se de que você domina o cálculo dessa grandeza vetorial que é o momento angular $\vec{L}$, verifique que a lei de conservação acima independe do sistema de coordenadas adotado (desde que estejam todos associados a referenciais inerciais): repita o mesmo cálculo para um sistema de referência com origem num ponto do plano canaleta-fio a uma distância $\alpha > 0$ acima da canaleta e $\beta > 0$ à direita da posição inicial da bola 1.

Uma variante de solução perfeitamente aceitável (e mais simples!) para o cálculo do vetor momento angular após a colisão seria aquela em que a conservação de momento angular é explicitamente invocada para justificar que $\vec{L}_a = \vec{L}_d$. Entretanto, deve estar explícito nessa solução a razão para que $\vec{L}$ seja conservado, ou seja, o valor nulo do torque resultante.