# Modelo de Índice Único

April 12, 2012

Uma das grandes vantagens do modelo de índice único é ser uma estrutura unificada para as informações que precisam ser fornecidas para o cálculo do portifólio ótimo. O Modelo de Markowitz depende de estimativas de prêmio de risco para cada ativo, que é decomposto em prêmio de risco de mercado e beta. Aqui podemos separar adequadamente estes dois pedaços. Além disso, permite que detalhemos de uma forma mais precisa qual seria a contribuição de uma análise específica a cada ação em termos de retorno adicional fornecido.

Mais especificamente, podemos estabelecer quatro etapas para este processo:

1. Os Macroeconomistas determinariam estimativas do prêmio de risco de mercado e risco associado com o índice de mercado – em uma base prospectiva

2. Análise estatística usando dados históricos permitiria que estimássemos o beta e a parcela do risco idiossincrático, $\sigma^2(e_t)$.

3. Com o beta e o prêmio de risco de mercado, o gestor de carteira determinaria quais seriam os retornos do ativo sem nenhuma contribuição da análise dos ativos.

4. A análise de ativos específicos leva a estimativas de retornos e a retornos além dos previstos pelo beta+prêmio de risco. Este seria o $\alpha$.

Como calcularíamos o portifólio ótimo neste caso? Vamos supor que, para limitar a chance de diversificação insuficiente, possamos incluir o índice de mercado na carteira. Inicialmente, calcularíamos o retorno esperado, por meio da soma dos $\alpha$, $\beta$ e o prêmio de risco de mercado. Usando as variâncias dos resíduos, calcularíamos o risco específico e a variância dos retornos. A partir daí, teríamos o problema de otimização tradicional.

Podemos também encontrar a carteira ótima de outra forma, usando diretamente os $\alpha$ e $\beta$. Podemos notar que os $\alpha$ e $\beta$, assim como as variâncias dos resíduos, são médias ponderadas dos respectivos coeficientes. Neste caso, temos:

$$\alpha_P = \sum_{i=1}^{n+1} w_i \alpha_i,\ \alpha_{n+1} = \alpha_M = 0$$

$$
\begin{aligned}
\beta_P &= \sum_{i=1}^{n+1} w_i\beta_i,\ \beta_{n+1} = \beta_M = 1 \\
\sigma^2(e_P) &= \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2\sigma^2(e_i),\ \sigma^2(e_{n+1}) = \sigma^2(e_M) = 0
\end{aligned}
$$

Podemos expressar o problema de otimização, neste caso, como sendo um problema de maximização do Índice de Sharpe – ou seja, qual é o conjunto de pesos que maximiza o índice? Vamos reescrever o índice de Sharpe:

$$
\begin{aligned}
E(R_P) &= \alpha_P + E(R_M)\beta_P = \sum_{i=1}^{n+1} w_i\alpha_i + E(R_M)\sum_{i=1}^{n+1} w_i\beta_i \\
\sigma_P &= [\beta_P^2\sigma_M^2 + \sigma^2(e_P)]^{1/2} = \left[\sigma_M^2\left(\sum_{i=1}^{n+1} w_i\beta_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n+1} w_i^2\sigma^2(e_i)\right]^{1/2} \\
S_P &= \frac{E(R_P)}{\sigma_P}
\end{aligned}
$$

O problema de otimização, neste caso, é o de encontrar o conjunto de $w_i$ que maximiza $S_P$ sujeito à restrição que $\sum w_i = 1$[1] . Podemos entender os resultados do otimizador em termos de uma carteira composta por duas partes:

1. Uma carteira Ativa, que é composta pelos $n$ ativos individuais
2. A carteira de mercado, o $n+1$-ésimo ativo.

Podemos mostrar que o índice de sharpe resultante do processo de otimização é dado pela seguinte fórmula:

$$S_P^2 = S_M^2 + \left[\frac{\alpha_A}{\sigma(e_A)}\right]^2$$

O termo entre colchetes é a chamada Razão de Informação. Adicionalmente, se tivermos um conjunto ótimo de pesos, podemos definir que a razão de informação do portifólio ativo é calculada da seguinte forma:

$$\frac{\alpha_A}{\sigma(e_A)} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha_i}{\sigma(e_i)}\right]^2$$

# 1 Tracking Portfolio

Vamos imaginar que um analista tenha estimado um modelo da seguinte forma – já definido em termos de retornos excedentes:

$$R_P = .04 + 1.4R_{S\&P500} + e_P$$

[1] Às vezes, também a restrição de não venda a descoberto.

Aparentemente, este é um bom negócio, mas como o mercado pode mexer, pode acabar levando a um resultado ruim. Neste caso, como o gestor pode travar apenas o 0,04? O caminho é por meio de um tracking portfolio, que tenha o mesmo $\beta$ que $P$, e o mínimo $\alpha$ possível. Podemos construir este portfolio por meio de uma posição longa no índice - que tem beta de 1 - e alavancar esta posição com 40% tomado emprestado em títulos sem risco. Neste caso a carteira que segue tem um beta de 1,4. Iremos usar esta carteira hipotética para "limpar" o efeito sistemático do mercado – a vendendo (ou seja, vendendo uma posição longa de 140% e emprestando 40% no título público).

Neste caso, o retorno esperado da carteira fica sendo:

$$R_C = R_P - R_T = 0.04 + e_P$$