O Modelo de Mercado

Cláudio Ribeiro de Lucinda
Universidade de São Paulo

O modelo de mercado postula que todos os retornos são linearmente relacionados a uma variável aleatória R_m de um chamado *portfolio de mercado*, definido como todas as ações negociadas no mercado em proporção equivalente aos seus valores de mercado. Vamos assumir que o R_m tenha média μ_m e variância σ_m^2.

Neste caso, a variável aleatória de retorno para um ativo i tem a seguinte forma:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i, i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

Em que α_i é uma constante representando o componente extra-mercado do retorno, o $\beta_i R_m$o componente de mercado do retorno e β_i a sensibilidade à volatilidade do retorno. Esta variação aleatória em torno da relação é dada por ε_i.

Este modelo supõe que exista um elemento sistemático no valor de um ativo, que é controlado pelo mercado e não pela companhia, assim como uma parte do preço da ação que é dada pelos lucros e eficiência da empresa. Note que podemos calcular o β_i a partir de uma série temporal de (R_{it}, R_{mt}). Este modelo de mercado também é conhecido como modelo de índice único, em que os retornos são simplesmente relacionados a R_m. Se existissem outras variáveis que possam afetar os retornos e entrem na equação 1, ele seria modelo de índice múltiplo.

As premissas sobre o termo de variação aleatória ε_i são importantes e definidas como se segue:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_i) &= 0 \\ var(\varepsilon_i) &= \sigma_i^2 \\ Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= 0 \\ Cov(R_m, \varepsilon_i) &= 0 \end{aligned}$$

As duas primeiras equações são comuns, a terceira implica a independência decorrente do fato que os retornos são ligados apenas pelos efeitos de mercado e a última é decorrência de independência entre os retornos de mercado e os retornos idiosincráticos de alguma empresa em particular. Queremos obter a fronteira eficiente e os seus portfolios, sob estas premissas. Já vimos em sala que a matriz completa de covariância não é necessária.

Os retornos de uma carteira qualquer P são dados por $\underline{R_p = w^T R}$, sendo que os retornos empilhados dos ativos são dados por:

$$\underline{\mathrm{R}} = \alpha + \beta R_m + \varepsilon$$

Tirando esperanças e variâncias, temos

$$E(\underline{\mathrm{R}}) = \alpha + \beta\mu_m$$
$$Var(\underline{\mathrm{R}}) = (\beta\beta^T)\sigma_m^2 + diag(\sigma^2)$$
$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Para um portfolio qualquer:

$$R_P = w^T\underline{\mathrm{R}} = w^T(\alpha + \beta R_m + \varepsilon)$$

A esperança e a variância são:

$$E(R_P) = w^T\alpha + w^T\beta\mu_m$$
$$Var(R_P) = (w^T\beta)^2\sigma_m^2 + w^T diag(\sigma^2)w$$

Esta formulação implica que tenhamos uma alocação em duas partes: uma delas em cada um dos ativos, sendo com retorno $w^T\beta\mu_m$ e variância $w^T diag(\sigma^2)w$, e uma outra parte no índice, com média $w^T\alpha$ e variância $(w^T\beta)^2\sigma_m^2$. Em somatória, podemos escrever a variância do portifólio da seguinte forma:

$$Var(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2\sigma_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2 \sigma_m^2$$

A fórmula acima mostra que, com a alocação igual entre os ativos, a primeira somatória soma quando $n \to \infty$, e o termo seguinte não soma. Ou seja, o vetor w tem $(n+1)$ elementos: os n ativos mais o índice. Para propormos o problema de otimização, vamos definir algumas variações nos vetores anteriormente definidos:

- Pesos "aumentados": $g^T = \begin{bmatrix} \underline{\mathrm{w}}^T & \underline{\mathrm{w}}^T\beta \end{bmatrix}_{1\times(n+1)}$
- Alphas extra-mercado $v^T = \begin{bmatrix} \alpha^T & \mu_m \end{bmatrix}_{1\times(n+1)}$
- Variâncias aumentadas: $\underline{\mathrm{D}} = diag(\begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma_m^2 \end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$

Assim, o problema fica sendo:

$$\min_g g^T \underline{\mathrm{D}} g$$
$$suj.a g^T v = r$$

A diferença aqui está em duas restrições adicionais. Uma vez que $g_i = w_i, \forall i < n+1$ e $g_{n+1} = \sum_{i=1}^n g_i \beta_i$, temos que:

$$g^T \underline{\mathrm{b}} = g^T \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Além disso, se os investimentos nos ativos tem de somar 1, temos que $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = g_1 + g_2 + \cdots + g_n + 0 \times g_{n+1} = 1$, temos:

$$g^T h = g^T \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

O lagrangiano, neste caso, fica sendo:

$$L = g^T \underline{\mathrm{D}} g - \lambda_1 (g^T v - r) - \lambda_2 (g^T h - 1) - \lambda_3 (g^T b)$$

A CPO com relação a g é dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial g} = 2\underline{\mathrm{D}} g - \lambda_1 v - \lambda_2 h - \lambda_3 b = 0$$
$$\underline{\mathrm{D}} g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^T$$
$$g = \frac{1}{2} \underline{\mathrm{D}}^{-1} (\begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^T)$$

Premultiplicando os dois lados da igualdade por $\begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}^T$, ficamos com:

$$\begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}^T g = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}^T \underline{\mathrm{D}}^{-1} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^T$$

Podemos definir uma matriz A, com os termos do meio desta fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}^T \underline{\mathrm{D}}^{-1} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}$$

O que permite simplificar a equação anterior:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}^T = 2A^{-1} \begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix}^T g = 2A^{-1} \begin{bmatrix} r & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$g = \underline{\mathrm{D}}^{-1}(\begin{bmatrix} v & h & b \end{bmatrix} 2A^{-1} \begin{bmatrix} r & 1 & 0 \end{bmatrix}^T)$$

Podemos também calcular a variância associada em termos analíticos:

$$Var(R_P) = \begin{bmatrix} r & 1 & 0 \end{bmatrix} A^{-1} \begin{bmatrix} r & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$