Universidade de São Paulo
FEA-RP
Cláudio R. Lucinda

Matemática Aplicada a Negócios
REC3600 – Finanças

Nota de Aula

Vamos agora detalhar a matemática do portifólio eficiente. Vamos assumir a existência de $N > 2$ ativos, e que nenhum ativo possui um retorno que possa ser expresso como uma combinação linear dos retornos de um subconjunto dos outros ativos. Vamos denominar V a matriz de variância-covariância dos ativos, em que cada célula de $V_{ij} = Cov(r_i, r_j)$. Por construção esta matriz é simétrica e a diagonal apresenta as variâncias dos retornos. Suponha que os pesos dos retornos podem ser expressos por um vetor denominado w. Vamos adicionalmente garantir que estes pesos somem um com a condição $w^T\mathbf{1} = 1$. A variância do portifólio pode ser entendida como sendo uma forma quadrática deste negócio:

$$Var_P = w^T V w$$

Da mesma forma, o retorno deste portifólio pode ser entendido como uma média ponderada dos retornos dos ativos individuais. Se colocarmos todos os retornos em uma mesma matriz e, temos que:

$$E(r_p) = w^T e$$

Ou seja, para um dado retorno objetivo E , o portifólio eficiente é o que resolve o problema a seguir:

$$\begin{aligned} Min_w \quad & \frac{1}{2} w^T V w \\ t.q. \quad & w^T e = E \\ & w^T \mathbf{1} = 1 \end{aligned}$$

A vantagem desta fórmula é que ela prescinde do uso de métodos numéricos para a obtenção de um portifólio de variância mínima. Resolvendo esta parada, precisamos construir o seguinte Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda(E - w^T e) + \gamma(1 - w^T \mathbf{1})$$

As nossas fantásticas CPO's são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial w} &= Vw - \lambda e - \gamma \mathbf{1} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= E - w^T e \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} &= 1 - w^T \mathbf{1} \end{aligned}$$

Como as três condições têm que seri iguais a zero, temos então:

$$Vw_p = \lambda e - \gamma \mathbf{1}$$

Multiplicando os dois lados por V^{-1}:

$$w_p = \lambda V^{-1} e + \gamma V^{-2} \mathbf{1} \tag{1}$$

Agora multiplicando por e^T:

$$e^T w_P = \lambda(e^T V^{-1} e) + \gamma(e^T V^{-1} \mathbf{1})$$

Uma vez que $e^T w_P = w_P^T e$, temos da segunda restrição do problema de minimização:

$$E = \lambda(e^T V^{-1} e) + \gamma(e^T V^{-1} \mathbf{1}) \tag{2}$$

Olhando novamente a equação (1), podemos fazer uma manhazinha com ela, premultiplicando por $\mathbf{1}^T$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T w_p &= \lambda(\mathbf{1}^T V^{-1} e) + \gamma(\mathbf{1}^T V^{-2} \mathbf{1}) \\ 1 &= \lambda(\mathbf{1}^T V^{-1} e) + \gamma(\mathbf{1}^T V^{-2} \mathbf{1}) \end{aligned} \tag{3}$$

Este aqui é um sistema de duas equações em duas incógnitas – e, por mais esdrúxulo que possa parecer, É LINEAR! Para resolvê-lo, temos que lembrar que, devido à simetria da matriz de variância-covariância e à propriedade que a transposta de um conjunto de matrizes se multiplicando inverte a ordem delas (ou seja, sendo F, G e H três matrizes, temos que $(FGH)^T = H^T G^T F^T$), a gente pode dizer que $e^T V^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T V^{-1} e$, que chamaremos de $\mathbf{A}$. Os outros animais serão definidos da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = e^T V^{-1} e$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{1^T}V^{-1}\mathbf{1}$$

Desta forma, o nosso sisteminha fica sendo:

$$\begin{aligned} E &= \lambda\mathbf{B} + \gamma\mathbf{A} \\ 1 &= \lambda\mathbf{A} + \gamma\mathbf{C} \end{aligned}$$

Resolvendo o sisteminha:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1-\gamma\mathbf{C}}{\mathbf{A}} \\ E &= \frac{\mathbf{B}-\gamma\mathbf{BC}}{\mathbf{A}} + \gamma\mathbf{A} \\ \gamma &= \frac{\mathbf{B}-\mathbf{AE}}{\mathbf{A^2}-\mathbf{BC}} \\ \lambda &= \frac{\mathbf{A}-\mathbf{CE}}{\mathbf{A^2}-\mathbf{BC}} \end{aligned}$$

Substituindo isso de volta na equação (1), temos que:

$$\begin{aligned} w_P &= \frac{\mathbf{A}-\mathbf{CE}}{\mathbf{A^2}-\mathbf{BC}}V^{-1}e + \frac{\mathbf{B}-\mathbf{AE}}{\mathbf{A^2}-\mathbf{BC}}V^{-1}\mathbf{1} \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}}[\mathbf{B}(V^{-1}\mathbf{1}) - \mathbf{A}(V^{-1}e)] + \frac{1}{\mathbf{D}}[\mathbf{C}(V^{-1}e) - \mathbf{A}(V^{-1}\mathbf{1})]E \\ &= g + hE \end{aligned}$$

CAPM

Vamos fazer a derivação do CAPM para um ativo genérico. Considere um portifólio com uma fração α no portifólio de mercado e o restante em um ativo genérico j. Os momentos deste portifólio são:

$$\begin{aligned} \bar{r}_P &= \alpha\bar{r}_M + (1-\alpha)r_j \\ \sigma_P^2 &= \alpha^2\sigma_M^2 + (1-\alpha)^2\sigma_j^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{jM} \end{aligned}$$

À medida que mudamos α vamos desenhando a curva pontilhada, que deve passar pelos dois componentes do portifólio, não pode cruzar a CML e deve ser tangente à CML – ou seja, com a mesma inclinação

$\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ no portifólio de mercado. Isso implica que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P} &= \frac{\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_P}{d\alpha}} \\
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha} &= \bar{r}_M - \bar{r}_j \\
2\sigma_P \frac{d\sigma_P}{d\alpha} &= 2\alpha\sigma_M^2 - 2(1-\alpha)\sigma_j^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{jM} \\
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha} &= \frac{(\bar{r}_M - \bar{r}_j)\sigma_P}{\alpha\sigma_M^2 - (1-\alpha)\sigma_j^2 + \alpha(1-\alpha)\sigma_{jM}} \\
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha}|_{\alpha=1} &= \frac{(\bar{r}_M - \bar{r}_j)\sigma_M}{\sigma_M^2 - \sigma_{jM}} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \\
(\bar{r}_M - \bar{r}_j) &= \frac{(\bar{r}_M - r_f)(\sigma_M^2 - \sigma_{jM})}{\sigma_M^2} \\
\bar{r}_j &= r_f + (\bar{r}_M - r_f)\frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}
\end{aligned}
$$