Financial Economics
Nota 8

22nd May 2007

Derivação da Duration. Vamos considerar o preço de um título como sendo igual ao VPL de um título, descontado ao *Yield to Maturity*. Isto implica a seguinte relação de preços:

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_t CF_t \times (1+YTM)^{-t} \\
\frac{\partial P}{\partial(1+YTM)} &= \sum_t CF_t \times t \times (1+YTM)^{-t-1} \\
\frac{\partial P}{\partial(1+YTM)} &= -\frac{1}{(1+YTM)} \sum_t t \times CF_t (1+YTM)^{-t} \\
\frac{\Delta P}{\Delta(1+YTM)} &\simeq -\frac{1}{(1+YTM)} \sum_t t \times CF_t (1+YTM)^{-t}
\end{aligned}
$$

Lembrando que a Duration pode ser definida como:

$$D = \sum_t t \times \frac{\frac{CF_t}{(1+YTM)^t}}{P}$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta P}{\Delta(1+YTM)} &\simeq -\frac{P}{(1+YTM)} \times D \\
\frac{\Delta P}{P} &\simeq -D \times \frac{\Delta(1+YTM)}{(1+YTM)}
\end{aligned}
$$

Podemos ver, então, que a sensibilidade do preço de um título à alterações no YTM de um título é proporcional (negativamente) à sua Duration. Podemos entender a Duration como sendo:

$$D = -(1+YTM)\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial YTM}$$

Podemos definir a Duration Modificada:

$$D^* = \frac{D}{1+YTM} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial YTM}$$

Além disso, a Convexidade de um título pode ser aproximado por:

$$C = \frac{1}{P}\frac{\partial P^2}{\partial^2 YTM}$$

Vamos definir os efeitos de uma elevação nos YTM sobre os preços de um título, a partir de uma expansão de Taylor. Vamos supor que o YTM suba, instantaneamente, de YTM_0 para YTM_1. Neste caso, o novo preço pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
P(YTM_1) &= P(YTM_0) + \frac{\Delta P(YTM_0)}{\Delta YTM}\Delta YTM + \frac{1}{2}\frac{\Delta (P(YTM_0))^2}{\Delta^2 YTM}(\Delta YTM)^2 \\
\Delta P &= -D^* P(YTM_0)\Delta YTM + \frac{1}{2}CP(YTM_0)(\Delta YTM)^2 \\
\frac{\Delta P}{P} &= -D^*\Delta YTM + \frac{1}{2}C(\Delta YTM)^2
\end{aligned}$$