Aula 06

Bibliografia: BKM, cap. 09

Cláudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Objetivos da Aula

1. CAPM
   - O CAPM
   - CAPM zero Beta
   - Testando o CAPM

Objetivos da Aula

Abordagens de Precificação de Ativos

- Questão Fundamental de Teoria de Finanças
  - A grande questão que iremos discutir nesta parte do curso é:
    - COMO AVALIAR UM FLUXO DE CAIXA?
    - Ou seja, qual é o valor de um fluxo de rendimentos que se estende por um período futuro?

Abordagens Fundamentais

- Existem duas formas pelas quais um fluxo de caixa como o descrito anteriormente pode ser avaliado:
    - Abordagem de Equilíbrio: Um preço para este fluxo de caixa pode ser derivado a partir de "primitivas", como hipóteses sobre características dos agentes e ambiente institucional.
    - Abordagem de Arbitragem: O preço para este fluxo de caixa pode ser derivado a partir dos preços de outros ativos.

O CAPM

- É o modelo de equilíbrio subjacente à toda teoria moderna de finanças.
- É derivado a partir dos princípios de diversificação com a ajuda de hipóteses simplificadoras
- Os principais pesquisadores associados com a sua criação são Markowitz, Sharpe, Lintnet e Mossin.

Hipóteses

- Investidores Individuais são Tomadores de Preços
- Horizonte de Investimento Período Único
- O conjunto de possibilidade de investimentos é restrito a ativos financeiros negociados em bolsa.
- Não existem taxas e custos de transação
- A informação é gratuita e disponível para todos os investidores
- Os indivíduos otimizam corretamente em cima de média e variância
- As expectativas são homgêneas

Condições Resultantes de Equilíbrio

- Todos os investidores terão o mesmo portifólio para os ativos arriscados – o chamado portifólio de mercado.
- Este portifólio de mercado contém todos os ativos e a proporção de cada um deles no valor total é dada pela participação do valor de mercado.
- O prêmio de risco do mercado depende da aversão média a risco dos participantes de mercado.
- O prêmio de risco de uma ação em particular é uma função da sua covariância com o "portifólio de mercado"

CAPM – Derivação

- Vamos fazer a derivação do CAPM para um ativo genérico. Considere um portifólio com uma fração α no portifólio de mercado e o restante em um ativo genérico j. Os momentos deste portifólio são:

$$\begin{aligned} \bar{r}_P &= \alpha \bar{r}_M + (1-\alpha) r_j \\ \sigma_P^2 &= \alpha^2 \sigma_M^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_j^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{jM} \end{aligned}$$

CAPM – Derivação (II):

- À medida que mudamos α vamos desenhando a curva pontilhada, que deve passar pelos dois componentes do portifólio, não pode cruzar a CML e deve ser tangente à CML – ou seja, com a mesma inclinação $\frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M}$ no portifólio de mercado. Isso implica que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{r}_P}{d\sigma_P} &= \frac{\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha}}{\frac{d\sigma_P}{d\alpha}} \\
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha} &= \bar{r}_M - \bar{r}_j \\
2\sigma_P \frac{d\sigma_P}{d\alpha} &= 2\alpha\sigma_M^2 - 2(1-\alpha)\sigma_j^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{jM} \\
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha} &= \frac{(\bar{r}_M - \bar{r}_j)\sigma_P}{\alpha\sigma_M^2 - (1-\alpha)\sigma_j^2 + \alpha(1-\alpha)\sigma_{jM}}
\end{aligned}
$$

CAPM – Derivação (III):

- Vamos agora trabalhar com um aumento infinitesimal na posição do ativo qualquer, ou seja, com $\alpha = 1$:

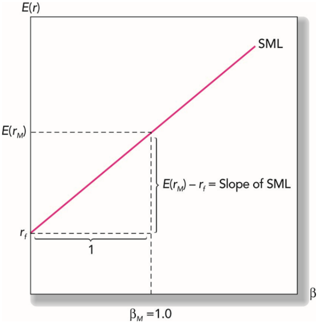
$$
\begin{aligned}
\frac{d\bar{r}_P}{d\alpha}\Big|_{\alpha=1} &= \frac{(\bar{r}_M - \bar{r}_j)\sigma_M}{\sigma_M^2 - \sigma_{jM}} = \frac{\bar{r}_M - r_f}{\sigma_M} \\
(\bar{r}_M - \bar{r}_j) &= \frac{(\bar{r}_M - r_f)(\sigma_M^2 - \sigma_{jM})}{\sigma_M^2} \\
\bar{r}_j &= r_f + (\bar{r}_M - r_f)\frac{\sigma_{jM}}{\sigma_M^2}
\end{aligned}
$$

O CAPM – Implicações:

1. Ativos cujos retornos tem maior covariância com o mercado tendem a demandar um maior retorno esperado:
   - Intuitivamente: Estes são ativos que, quando as coisas vão mal – o mercado vai mal – este ativo vai pior, ou seja, ele também cai. Neste sentido, agentes avessos ao risco tendem a demandar um prêmio para carregar este ativo.
2. Maior prêmio de risco de mercado tende a elevar o retorno esperado de todos os ativos.

Security Market Line

- Esta é a representação gráfica da primeira das implicações do slide anterior



Security Market Line (II):

- Ela pode ser usada como uma forma de se testar o CAPM.
- Calculando os betas de vários ativos, assim como o retorno esperado, deveríamos obter:
  - Uma reta
  - E a inclinação da reta similar ao prêmio de risco de mercado

CAPM zero Beta

- Originalmente desenvolvido por Fisher Black para lidar com situações em que os agentes encontram restrições sobre a capacidade de se alavancar ou emprestar.
- Ou seja, não temos os agentes transacionando ativamente em cima da taxa de juros livre de risco.
- Podemos usar os resultados do CAPM para “inferir” qual seria esta taxa de juros

CAPM zero Beta (II):

- Vamos começar com algumas propriedades interessantes da fronteira eficiente

1. Qualquer combinação linear de dois portifólios de fronteira também é um portifólio de fronteira
2. O retorno esperado para um ativo qualquer pode ser expresso como uma função dos dois portifólios de fronteira da seguinte forma:

$$E(r_i) - E(r_Q) = [E(r_P) - E(r_Q)]\frac{Cov(r_i, r_Q) - Cov(r_P, r_Q)}{\sigma_P^2 - Cov(r_P, r_Q)}$$

CAPM zero Beta (III):

1. Cada Portifólio Eficiente possui uma carteira "companheira", com a qual (i) tem correlação igual a -1 e (ii) se localiza na parte inferior (dominada) da fronteira eficiente. Isso vale também para a carteira de mercado, o que leva à seguinte implicação:

$$E(r_i) - E(r_Z) = [E(r_M) - E(r_Z)]\frac{Cov(r_i, r_M)}{\sigma_M^2}$$

CAPM Zero Beta (IV):

- Como podemos estimar isso diretamente?
- Vamos imaginar a equação econométrica:

$$r_i = r_Z + \beta_i(r_M - r_Z) + \varepsilon$$

- Caso suponhamos $\varepsilon = 0$, podemos reescrever a equação como sendo:

$$r_i = r_Z(1 - \beta_i) + \beta_i r_M$$

- Podemos mostrar que se estimarmos o $\beta_i = {}^{Cov(r_i, r_M)}/_{Var(r_M)}$, conseguimos uma estimativa do beta e aí podemos remontar a equação para obter r_Z.

Testando o CAPM

- O teste tem que ser baseado em séries temporais de informação – porque precisamos de estimativas de retornos esperados e matrizes variância-covariância
- Estes negócios determinam uma fronteira eficiente *ex post* (ou seja, depois dos dados realizados)
- Supostamente estes resultados deveriam valer *ex ante* também (ou seja, de agora pra frente)
- Se M é uma carteira de mercado eficiente *ex post*, temos que o CAPM vale, $r_j = r_f + \beta_j(r_M - r_f)$
  - Mas se não for eficiente *ex post*, não vale

Testando o CAPM (II):

- Ou seja, o teste de se esta equação vale equivale a investigar se M está na fronteira eficiente *ex post*.
- Se não estiver, boa parte dos pesquisadores diria que o modelo está errado.
  - Mas esta não é a implicação correta, apenas estamos dizendo que não temos dados bons para M
- Roll continua, dizendo que as únicas hipóteses que podemos testar é são as de o portifólio de mercado é eficiente *ex ante*, e se os agentes podem emprestar ou tomar emprestado à taxa livre de risco.

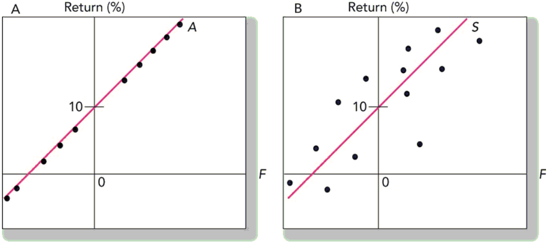
Modelo de Fator Único

- Vamos trabalhar um pouco mais a idéia de teoria de precificação por arbitragem. Vamos começar mostrando que se uma carteira é bem diversificada, apenas o risco de fator existe. Ou seja, em uma carteira com n ativos e pesos w_i tais que $\sum_i w_i = 1$, temos que a taxa de retorno do portifólio é dada por:

$$\begin{aligned} r_P &= E(r_P) + \beta_P F + e_P \\ \sigma_P^2 &= \beta_P^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P) \\ \sigma^2(e_P) &= \sum_i w_i^2 \sigma^2(e_i) \end{aligned}$$

- Se $w_i = \frac{1}{n}$, temos que $\sigma^2(e_P) = \frac{1}{n} \sum {}^{\sigma^2(e_i)}/_n = \bar{\sigma}^2(e_i)/n$. Isso mostra que o risco do portifólio vai declinando à medida em que adicionamos mais ativos. Neste sentido, os retornos observados estariam bem certinhos juntos a uma linha em um plano cartesiano composto pelo retorno do ativo e o movimento do fator F.

Modelo de Fator Único (II):



Primeira Proposição

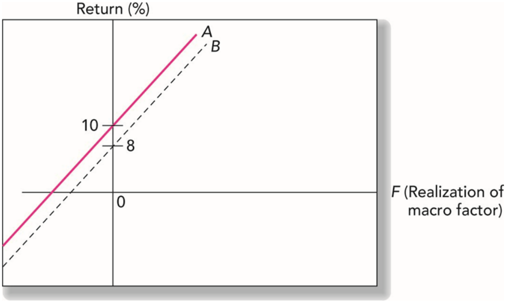
Definição

Toda carteira bem diversificada com betas iguais TEM DE TER mesmos retornos esperados, por arbitragem

Demonstração.

Imagine que não fosse verdade, e que tivéssemos uma carteira P que tem $E(r_P) = 3\%$, e outra carteira Q que tivesse $E(r_Q) = 5\%$. Neste caso, poderíamos ter uma posição vendida na carteira P e uma posição comprada em Q e ganharíamos 2% em cima de nada! □

Primeira Proposição – Graficamente



Segunda Proposição

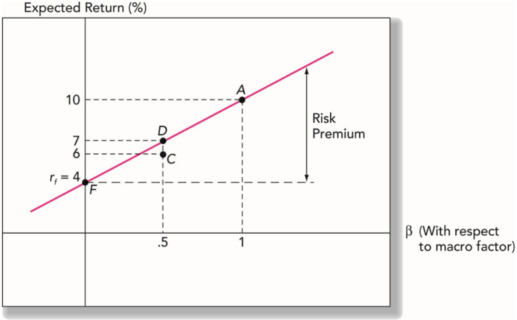
Definição

Cada carteira com betas diferentes tem que ter um retorno esperado dado pela linha que liga o beta do portifólio bem diversificado ao ativo livre de risco.

Demonstração.

Suponha que isso não seja verdade. Se não for verdade, o ativo tá pra cima ou pra baixo da linha. Se estiver abaixo da linha, você vende o ativo e compra a combinação entre o ativo livre de risco e o portifólio bem diversificado que é exatamente "para cima" e em cima da linha em relação ao ativo precificado de forma incorreta. Caso o ativo esteja precificado errado, você compra o ativo e vende a combinação exatamente "pra baixo" e em cima da linha em relação ao ponto. □

Segunda Proposição – Graficamente



E com mais de um fator?

- Podemos notar que, se a carteira de mercado for uma carteira bem diversificada, temos que ela está na SML e o retorno esperado de qualquer carteira bem diversificada é dado por $E(r_P) = r_f + \beta_P(E(r_M) - r_f)$.
- E para o caso de mais de um fator? Aí precisamos construir os chamados "portfolio de fatores", que são carteiras bem diversificadas que possuem o $\beta = 1$ para apenas um dos fatores e zero para o caso de todos os outros fatores. Neste caso, qualquer retorno de carteira pode ser construído a partir destes "portifólio de fatores".

Mais de um fator (II):

Imagine que tenhamos uma carteira P que tem betas em cada um dos dois fatores iguais a β_{P1} e β_{P2}. Em equilíbrio, esta carteira tem que render isso aqui:

$$E(r_P) = r_f + \beta_{P1}(E(F_1) - r_f) + \beta_{P2}(E(F_2) - r_f)$$

Porque se não render, posso comprar ou vender uma carteira Q composta pelo seguinte:

- β_{P1} no primeiro portifólio de fator
- β_{P2} no segundo portifólio de fator
- $(1 - \beta_{P1} - \beta_{P2})$ na taxa livre de risco

Mais de um fator (III):

- O retorno deste portifólio competidor é dado por:

$$E(r_Q) = \beta_{P1}E(F_1) + \beta_{P2}E(F_2) + (1 - \beta_{P1} - \beta_{P2})r_f$$

- Essas duas coisas, por arbitragem, tem que render a mesma coisa.

O CAPM e o APT Comparados

- O APT se aplica a portifólios bem diversificados e não necessariamente a ações individuais
- Com o APT é possível para algumas ações individuais não estar na SML
- O APT é mais geral no sentido que ele dá uma relação de retorno esperado e beta sem a hipótese do portifólio de mercado.
- O APT pode incorporar mais de um fator