Aula 05

Bibliografia: BKM, caps. 7 e 8

Cláudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Objetivos da Aula

Objetivos da Aula

Carteiras Arriscadas Ótimas

- Vamos agora entender como o processo de escolha do consumidor acaba por se transformar em uma escolha ótima de carteiras.
- O ponto inicial é como caracterizar carteiras arriscadas - em termos de retorno esperado e variância.

Risco e Retorno: dois ativos

- Supondo que tenhamos dois ativos de investimento, não surpreendentemente denominados $i = 1, 2$.
- O peso de cada um deles na carteira é de w_i, que por enquanto supomos entre zero e um
- Momentos:

$$
\begin{aligned}
E(r_P) &= \bar{r}_P = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 \\
Var(r_P) &= w_1^2 Var(r_1) + w_2^2 Var(r_2) + 2 w_1 w_2 Cov(r_1, r_2) \\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{12} \\
&= w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2
\end{aligned}
$$

O papel do Coeficiente de Correlação

- Como sabemos, $-1 \leq \rho_{12} \leq 1$
  - Se $\rho_{12} = -1$, as ações são perfeitamente e negativamente correlacionadas
  - Se $\rho_{12} = 1$, as ações são perfeitamente correlacionadas
- E se temos mais de duas ações?

Três ou mais ações

- Neste caso:

$$\begin{aligned}\sigma_P^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + \\ &+ 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

- Podemos escrever isso em forma matricial

Forma Matricial

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_N \end{bmatrix}_{1\times N} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}_{N\times N} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_{N\times 1} \\
&= \mathbf{w}^t \mathbf{V} \mathbf{w}
\end{aligned}
$$

Forma de Somatória

- A anterior é útil para cálculo de fronteira eficiente, esta aqui é mais eficiente para um resultado interessante sobre diversificação e risco:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

- Vamos nos focar em portifólios igualmente ponderados, o que implica:

$$\sigma_P^2 = \left(\frac{1}{N^2}\right) \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \left(\frac{1}{N^2}\right) \sigma_{ij}$$

Risco e Retorno com muitos Ativos:

- Neste caso, podemos definir o risco da carteira como sendo:

$$\sigma_P^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{N} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{\sigma}_{ij}(N-1)}{N^2} = \frac{\bar{\sigma}^2}{N} + \frac{N-1}{N^2}\bar{\sigma}_{ij}N = \frac{\bar{\sigma}^2}{N} + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{ij}$$

- Podemos fazer isso porque:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N-1}\sum_{j \neq i}^{N} \sigma_{ij}$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{\sigma}_{ij}$$

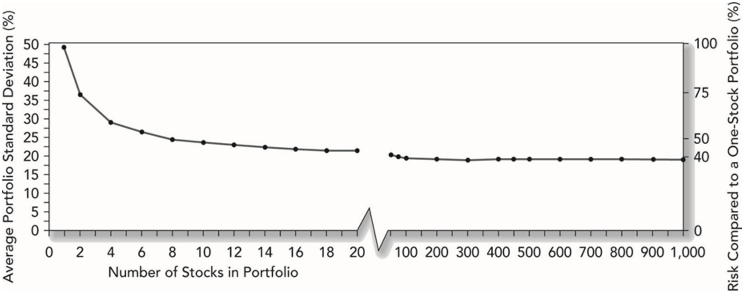
Risco e Retorno com muitos Ativos

- Finalmente, tirando o limite deste treco em direção ao infinito:

$$\lim_{N \to \infty} \sigma_P^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{N} + \frac{N-1}{N} \overline{\sigma}_{ij} = \overline{\sigma}_{ij}$$

- Ou seja, a diversificação reduz mas não elimina o risco.
- Este elemento $\overline{\sigma}_{ij}$ é um componente de covariância comum - hipóteses sobre ele geram diferentes modelos de precificação de ativos.

Limites à Diversificação – Graficamente



Fronteira Eficiente

- Vamos agora detalhar a matemática do portifólio eficiente.
- Vamos assumir a existência de $N > 2$ ativos, e que nenhum ativo possui um retorno que possa ser expresso como uma combinação linear dos retornos de um subconjunto dos outros ativos.
- Vamos denominar V a matriz de variância-covariância dos ativos, em que cada célula de $V_{ij} = Cov(r_i, r_j)$. Por construção esta matriz é simétrica e a diagonal apresenta as variâncias dos retornos.
- Suponha que os pesos dos retornos podem ser expressos por um vetor denominado w. Vamos adicionalmente garantir que estes pesos somem um com a condição $w^T\mathbf{1} = 1$.

Variância da Carteira – Retomando

- A variância do portifólio pode ser entendida como sendo uma forma quadrática deste negócio:

$$Var_P = w^T Vw$$

- Da mesma forma, o retorno deste portifólio pode ser entendido como uma média ponderada dos retornos dos ativos individuais.
- Se colocarmos todos os retornos esperados em uma mesma matriz e, com elemento típico $\bar{r}_i$ temos que:

$$E(r_p) = w^T e$$

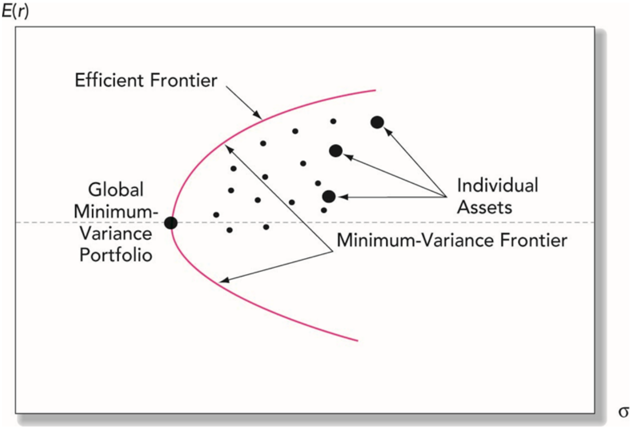
Problema de Otimização

- Ou seja, para um dado retorno objetivo E , o portifólio eficiente é o que resolve o problema a seguir:

$$
\begin{aligned}
Min_w \quad & \frac{1}{2} w^T V w \\
t.q. \quad & w^T e = E \\
& w^T \mathbf{1} = 1
\end{aligned}
$$

- A vantagem desta fórmula é que ela prescinde do uso de métodos numéricos para a obtenção de um portifólio de variância mínima.
  - Em muitos casos usamos métodos numéricos pois precisamos impor restrições adicionais à cateira que impedem solução analítica.
  - Os recursos computacionais também condicionam muito como

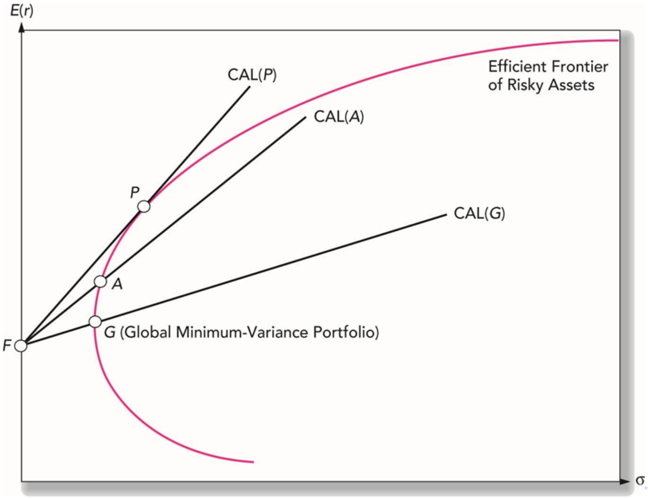
Fronteira Eficiente – Graficamente



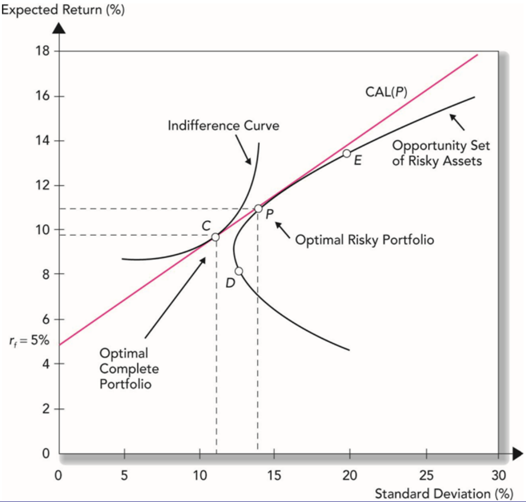
Incluindo um Ativo sem Risco

- E se incluíssemos um ativo sem risco no nosso modelo?
- Neste caso, a combinação eficiente envolveria uma carteira na fromteira eficiente e uma parcela investida no ativo sem risco.
- No entanto, a combinação exata vai depender da forma da função utilidade – média-variância – do consumidor

Ativo sem risco – Graficamente:



Determinação do Portifólio Ótimo Global:



Modelo de Índice Único

- Um dos problemas mais comuns com a implementação prática do modelo de carteira anteriormente mencionado envolve o cálculo da matriz V.
- Isso porque ela precisa ser simétrica e positiva definida – ou seja, os coeficientes tem que ser tais que $\mathbf{w}^T V \mathbf{w}$ tem que ser positiva.
- Existem várias formas de se calcular os elementos de V.
  - Covariâncias Históricas
  - Modelos ARCH/GARCH
  - Modelos Financeiros
- Iremos falar sobre os modelos de índice único, exemplos da terceira abordagem.

Modelo de Índice Único – Formulação

- Vamos começar assumindo que exista um fator que derive os desvios dos retornos em relação à média, além dos componentes aleatórios imprevisíveis:

$$r_i = \bar{r}_i + m + e_i$$

- Este fator comum é denotado por m, e a parte aleatória específica à firma é dada por e_i.
- Adicionalmente vamos assumir que m seja ortogonal a e_i

Covariância no Modelo de Índice Único:

- Podemos mostrar que, neste caso, a covariância entre os retornos de dois ativos depende exclusivamente do termo m:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] = E[(m + e_i)(m + e_j)] = \\ &= E[m^2 + me_i + me_j + e_i e_j] = E(m^2) = \sigma_m^2 \end{aligned}$$

- Ou seja, neste contexto o limite inferior abaixo do qual a variância de qualquer carteira é exatamente este σ_m^2
- Mas podemos refinar um pouco mais este resultado – inclusive porque nem todos os ativos possuem a mesma sensibilidade ao retorno de mercado.

Fator Único e beta

- Podemos calibrar esta sensibilidade a este fator único com a letra grega β_i:

$$r_i = \bar{r}_i + \beta_i m + e_i$$

- Esta formulação também permite que decomponhamos o risco de um ativo – sua variância – na parcela devida às variações de mercado e na parcela idiosincrática:

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E[(r_i - \bar{r}_i)^2] = E[(r_i - \bar{r}_i)(r_i - \bar{r}_i)] = \\
&= E[(\beta_i m + e_i)(\beta_i m + e_i)] = E[(\beta_i^2 m^2 + 2\beta_i m e_i + e_i^2)] = \\
&= E(\beta_i^2 m^2) + E(e_i^2) = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_e^2
\end{aligned}$$

Fator Único e beta (II):

- A covariância neste caso é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E[(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)] = E[(\beta_i m + e_i)(\beta_j m + e_j)] = \\ &= E[\beta_i \beta_j m^2] = \beta_i \beta_j \sigma_m\end{aligned}$$

Implementação Prática

- Vamos trabalhar agora a implementação prática do modelo. Para isto, precisaremos utilizar regressões
- Supondo que:
  - Escolhamos uma variável para representar o fator de risco macro – no sentido macro, entendo "que afeta todos os ativos ao mesmo tempo"
  - Coletamos uma série de dados históricos de retornos deste fator, do ativo e do ativo livre de risco.
  - Estimamos a seguinte regressão:

$$(r_i - r_f) = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f) + \varepsilon_i$$

Relação Risco–Retorno

- Com esta implementação, podemos derivar uma relação linear entre risco e retorno esperado:

$$\overline{(r_i - r_f)} = \alpha_i + \beta_i \overline{(r_m - r_f)}$$

- Veremos no CAPM que esta é a Security Market Line.
  - α_i - é um prêmio de retorno devido a fatores extra-mercado
  - β_i - sensibilidade do retorno do ativo ao retorno de mercado

Modelo de Índice e Diversificação

- Usando o conceito de α_i e β_i discutidos anteriormente, podemos dar uma forma mais precisa para o limite à diversificação.
- Se cada ativo tem o retorno excedente dado por:

$$R_i = (r_i - r_f) = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$

- Uma carteira composta por N ativos vai ter o retorno excedente dado por:

$$R_P = (r_p - r_f) = \alpha_P + \beta_P R_M + e_P$$

Modelo de Índice e Diversificação (II):

- Ou seja, supondo $w_i = {}^1/_N$:

$$
\begin{aligned}
R_p &= \sum_{i=1}^{N} w_i R_i = \sum_{i=1}^{N} w_i(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i + \frac{\sum_{i=1}^{N}\beta_i}{N} R_M + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e_i
\end{aligned}
$$

- Definindo $\alpha_P = \sum_i {}^{\alpha_i}/_N$, $\beta_P = \sum_i {}^{\beta_i}/_N$ e $e_p = \sum_i {}^{e_i}/_N$

Modelo de Índice e Diversificação (III):

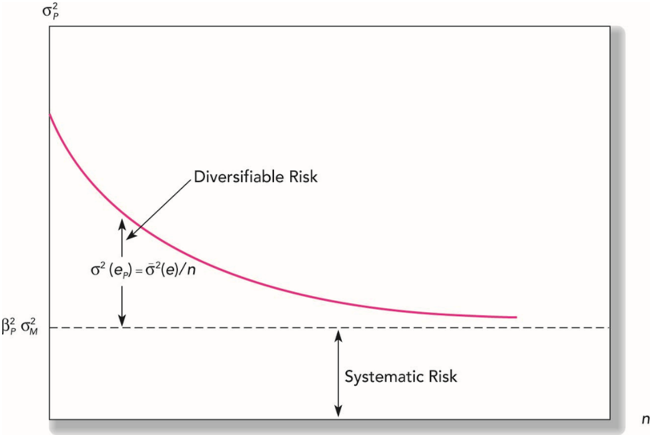
- Fazendo a mesma decomposição de antes, temos:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_P}^2$$

- Se supusermos os componentes aleatórios independentes entre si, podemos adicionalmente escrever:

$$\sigma_{e_P}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i^2}{N^2} = \frac{\bar{\sigma}^2}{N}$$

Diversificação e Modelo de Índice Único – Graficamente



Implementando o Modelo de Índice Único

- Para que possamos utilizar o modelo de índice único para a estimativa de fronteira eficiente, precisamos dos seguintes inputs:
  1. Estimativas dos α_i (N estimativas)
  2. Estimativa do Prêmio de Risco do Fator do ativo $\beta_i(r_M - r_f)$ (N estimativas dos β_i e uma estimativa de $(r_M - r_f)$)
  3. Estimativa do Risco Idiossincrático dos ativos σ^2_{eP} (N estimativas)
  4. Estimativa da Variância do retorno do fator comum σ^2_M (uma estimativa)

Fronteira Eficiente – Modelo de Índice Único e VC completa