Aula 04

Bibliografia: BKM, cap. 06

Cláudio R. Lucinda

FEA-RP/USP

Objetivos da Aula

1. Aversão a Risco e Alocação de Capital em Ativos Arriscados

Objetivos da Aula

1. Aversão a Risco e Alocação de Capital em Ativos Arriscados
2. Escolha sob Incerteza
   - Loterias
   - Preferências sobre Loterias

Objetivos da Aula

1. Aversão a Risco e Alocação de Capital em Ativos Arriscados
2. Escolha sob Incerteza
   - Loterias
   - Preferências sobre Loterias
3. VNM
   - Aversão Relativa e Absoluta
   - Utilidade Média-Variância

Escolha Sob Incerteza

- Até o momento, pensamos nas escolhas de cestas entre as quais nosso consumidor tem que escolher como sendo "coisas certas".
- Muitas decisões importantes dizem respeito a escolhas cujas conseqüências são incertas no momento em que a decisão é tomada.
- Nada que estudamos impede que analisemos tais mercadorias. No entanto, a natureza destas coisas é tal que podemos
  - Fazer hipóteses adicionais sobre as preferências do consumidor sobre tais coisas
  - Ter algumas coisas mais consistentes sobre a demanda do consumidor por estes tipos de mercadorias

Teoria da Escolha sob Incerteza

- Para começar, imagine um conjunto de resultados denotado por X, e um *conjunto de distribuições de probabilidade sobre estes resultados*.
- Seja P o conjunto de distribuições de probabilidade sobre os prêmios em X. Ou seja, P é uma função $P : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz duas propriedades:
  - $P(x) \geq 0, \forall x \in X$
  - $\sum_{x \in X} P(x) = 1$

TEI (Cont.)

- **Exemplos:**
  - Seja $X = \{-1000, -900, \cdots, -100, 0, 100, \cdots, 900, 1000\}$

1. Uma moeda “justa” é jogada e o sujeito ganha \$100 se der cara, e zero se der coroa:

$$p_1(x) = \begin{cases} 1/2 if & x \in \{0, 100\} \\ 0 & x \notin \{0, 100\} \end{cases}$$

2. Fazer uma aposta de 100 no preto em uma roleta:

$$p_2(x) = \begin{cases} 18/37 & x = 100 \\ 19/37 & x = -100 \\ 0 & x \notin \{100, -100\} \end{cases}$$

Loterias

- Podemos entender cada elemento deste conjunto P como sendo uma <u>loteria</u>.
  - Notação: a loteria que dá o prêmio x com probabilidade 1 é denotado δ_x.
- É interessante notar que podemos olhar o processo de escolha do consumidor de uma forma completamente diferente a partir disso.
- Ou seja, ao invés de escolhermos quantidades dos produtos, podemos escolher distribuições de probabilidade sobre quantidades.
  - Exemplo: ao invés de quantas unidades de cerveja e vinho estamos dispostos a consumir, podemos falar de uma distribuição de probabilidades sobre quantas latas de cervejas e taças de vinho.

Loterias

- Podemos entender cada elemento deste conjunto P como sendo uma loteria.
  - Notação: a loteria que dá o prêmio x com probabilidade 1 é denotado δ_x.
- É interessante notar que podemos olhar o processo de escolha do consumidor de uma forma completamente diferente a partir disso.
- Ou seja, ao invés de escolhermos quantidades dos produtos, podemos escolher distribuições de probabilidade sobre quantidades.
  - Exemplo: ao invés de quantas unidades de cerveja e vinho estamos dispostos a consumir, podemos falar de uma distribuição de probabilidades sobre quantas latas de cervejas e taças de vinho.

1. A vantagem disso é que estamos levando em consideração a distribuição conjunta (marginal e condicional).

Loterias Compostas

- Podemos combinar loterias. Imagine que tenhamos dois elementos em P, denotados p e q, e um número $\alpha \in [0,1]$. Podemos criar uma nova loteria $l \rightarrow \alpha p + (1-\alpha)q$, em dois passos:
  - O suporte (valores de X) desta nova loteria é a união dos suportes das loterias componentes.
  - Para qualquer x no suporte desta nova loteria, a probabilidade de ocorrência é dada por $l(x) = \alpha p(x) + (1-\alpha)q(x)$, com $p(x) = 0$ se x não estiver no suporte de p e $q(x) = 0$ se x não estiver no suporte de q.

Preferências sobre loterias

- Vamos antes de assumir qualquer axioma, estabelecer o *consequencialismo*. Ou seja, o indivíduo se preocupa apenas com os resultados, sendo indiferente entre a loteria e qualquer loteria composta que chegue ao mesmo resultado.
- Vamos definir aqui alguns axiomas sobre a relação de preferências.
  - (Ordenamento)$\succeq$ é completa e transitiva em termos de loterias. Ou seja, se $p \succeq q$ e $q \succeq r \Rightarrow p \succeq r$
  - (Substituição) Suponha que p e q sejam loterias tais que $p \succeq q$. Supondo $\alpha \in]0, 1[$ e r uma outra loteria qualquer, temos que $\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq \alpha q + (1 - \alpha)r$

Preferências sobre loterias (II)

- Continuando:
  - (Arquimedes) Suponha que existam três loterias, p, q, r tal que $p \succeq q \succeq r$. Existem, portanto, α e $\beta \in]0, 1[$ tal que $\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq q \succeq \beta p + (1 - \beta)r$
    - Pra entender isso, suponha que p seja R$100 com certeza, q R$ 10 com certeza e r a <u>morte</u> certa. Existe α que faça com que $\alpha p + (1 - \alpha)r \succeq q$? Usualmente sim....
- A escolha do consumidor se adapta a estes axiomas?
- Podemos construir uma função utilidade a partir destes axiomas?

Função Utilidade VN-M

Definition

Uma relação de preferências $\succeq$ definida sobre o conjunto P de loterias no espaço X satisfaz os três axiomas acima se e somente se existe uma função $u : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$p \succeq q \Leftrightarrow \sum_{x \in supp(p)} u(x)p(x) \geq \sum_{x \in supp(q)} u(x)q(x)$$

Além disso, é uma representação de $\succeq$ no sentido que a desigualdade acima se mantém a qualquer transformação afim de u, ou seja se ao invés de u colocássemos $v(x) \equiv a \times u(x) + b$

VN-M

Demonstração.

Começamos definindo o pior resultado dentro de P, que chamaremos de w, assim como o melhor resultado chamaremos de b, e por convenção assumimos que $u(b) = 1$ e $u(w) = 0$. Podemos definir a utilidade da loteria z como um número $u(z) = p_z$ tal que

$$p_z b + (1 - b) p_z w \sim z$$

Podemos demonstrar que esta função utilidade, que dá o peso da melhor alternativa do conjunto P em uma loteria entre o melhor e o pior resultado tal que a loteria composta resultante seja indiferente a z, satisfaz as propriedades de utilidade esperada. □

Utilidade do dinheiro

- Vamos agora assumir que X se refira a valores monetários.
- Neste caso, é razoável supor que o nosso consumidor prefira mais dinheiro a menos dinheiro.
- **Proposição:** Suponha que, para quaisquer x e y em X tal que $x \geq y$, temos que $\delta_x \succeq \delta_y$. Isso é verdade se e somente se a função u é estritamente crescente.

Aversão ao Risco

- Um conceito mais sutil é o de *aversão ao risco*. Para isso, vamos definir o conceito de valor esperado:

$$Ep = \sum_x xp(x)$$

- **Proposição:** Suponha que, para todas as loterias $p \in P$, temos que $\delta_{Ep} \succeq p$. Isto é verdade se e somente se a função utilidade é côncava.
- Em palavras, o que isso quer dizer é que o consumidor prefere o valor esperado de uma aposta à aposta propriamente dita.

Amor ao Risco e Neutralidade ao Risco

- Alternativamente, podemos definir o *amor ao risco* e a *neutralidade ao risco*:
- **Proposição:** Suponha que, para todas as loterias $p \in P$, temos que $p \succeq \delta_{Ep}$. Este indivíduo é amante ao risco, e é verdade se e somente se a função utilidade é convexa.
- **Proposição:** Suponha que, para todas as loterias $p \in P$, temos que $p \sim \delta_{Ep}$. Este indivíduo é neutro ao risco, e é verdade se a função utilidade é linear.

Dominância Estocástica

- Considere duas loterias, f e g, tais que a distribuição cumulativa das probabilidades seja $F(\cdot)$ e $G(\cdot)$. Podemos dizer que $f(x)$ domina estocasticamente em primeira ordem $g(x)$ se $G(x) \geq F(x), \forall x$.
    - Intuitivamente, isto quer dizer que f tem dominância estocástica de primeira ordem em relação a g se a probabilidade de termos um resultado menor que x é maior em G do que em F.

DE(II)

- **Proposição:** Se $F(\cdot)$ domina estocasticamente $G(\cdot)$ em segunda ordem, temos que:

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x)$$

  - Em palavras, isso quer dizer que F domina G estocasticamente em segunda ordem se e somente se um indivíduo avesso ao risco preferirá F a G.

Mean Preserving Spread

- Uma forma alternativa de expressar a dominância estocástica é usando o conceito de *mean preserving spread*.
- Imagine que tenhamos uma distribuição acumulada $F(\cdot)$. Imagine que peguemos um intervalo $[x', x'']$, pegamos a massa de probabilidade e a redistribuímos nos extremos do intervalo, de forma a preservar a média. Esta distribuição, que chamaremos de $G(\cdot)$, é um *mean preserving spread* de F.
- Alternativamente podemos afirmar que F domina estocasticamente de segunda ordem F.

Equivalente Certo

- Uma vez que nossa função u é contínua, a partir do Teorema do Valor Médio, temos que, para qualquer $\alpha \in [0,1]$ existe um x^* tal que $u(x^*) = \alpha u(x) + (1-\alpha)u(x')$.
- Portanto, para qualquer loteria p, temos um x^* tal que $\delta_{x^*} \sim p$.

Definition

Um **Equivalente Certo** para uma loteria p é um valor x tal que $\delta_x \sim p$

- Isso depende de u ser contínua, $X \in \mathbb{R}$. Se u for estritamente contínua, cada p possui um equivalente certo.

Aversão Absoluta ao Risco

- Dadas as premissas anteriores, temos que para cada loteria p temos um equivalente certo $C(p)$ que é menor ou igual a Ep. A diferença entre estas grandezas, $Ep - C(p)$ é denominada *prêmio pelo risco* de p, e denominado $R(p)$.
- Suponhamos que alteremos a loteria de tal sorte que, a cada prêmio que pudesse ser oferecido, adicionássemos z dólares ao prêmio, e que representemos esta loteria por $p \oplus z$.
- É razoável supor que, à medida em que a pessoa se torna mais rica, ela se importa cada vez menos com os riscos de uma aposta em particular.
    - Ou seja, com z aumentando, temos que $R(p \oplus z)$ não deve subir.

Aversão Absoluta ao Risco

Definition

Para um consumidor com função utilidade u, se $R(p \oplus z)$ é não crescente em z, o consumidor possui **aversão ao risco decrescente**. Alternativamente, se $R(p \oplus z)$ é constante, dizemos que ele apresenta **aversão ao risco constante**. Finalmente, se $P(p \oplus z)$ é não decrescente em z, dizemos que ele apresenta **aversão ao risco crescente**.

Coef. Aversão ao Risco

- Podemos construir um conceito que mede justamente isto, com a ajuda da nossa função utilidade:

Definition

Dada uma função contínua, estritamente crescente e que admite derivadas primeira e segunda u, seja $\lambda(x) = -{}^{u''(x)}/_{u'(x)}$ e este termo $\lambda(x)$ chamado **coeficiente de aversão absoluta ao risco** para o consumidor

- Uma vez que $u(x)$ é côncava e estritamente crescente, $\lambda(x) \geq 0$.

Coef. Aversão ao Risco

- Podemos construir um conceito que mede justamente isto, com a ajuda da nossa função utilidade:

Definition

Dada uma função contínua, estritamente crescente e que admite derivadas primeira e segunda u, seja $\lambda(x) = -u''(x)/u'(x)$ e este termo $\lambda(x)$ chamado **coeficiente de aversão absoluta ao risco** para o consumidor

- Uma vez que $u(x)$ é côncava e estritamente crescente, $\lambda(x) \geq 0$.

1. Podemos definir a aversão relativa ao risco como sendo $\mu(x) = -xu''(x)/u'(x)$.

Coef. Aversão ao Risco (II)

Fact

Um consumidor possui **aversão decrescente ao risco** *se e somente se λ for uma função não crescente de x. Da mesma forma, um consumidor possui* **aversão constante ao risco** *se e somente se λ é uma função constante, em que a função utilidade é uma transformação afim de $-e^{-\lambda x}$. Da mesma forma, se ele tiver* **aversão crescente ao risco**, *λ é uma função não decrescente de x.*

Comparando Aversão ao Risco

Definition

Um consumidor é **ao menos tão avesso ao risco** quanto outro se, para qualquer loteria p e valor certo x tal que o primeiro consumidor prefere fracamente a loteria p a x, o segundo consumidor prefere também.
Ou, alternativamente, se $\lambda_1(x) \geq \lambda_2(x)$, o que equivale a $u_2(x) \equiv f(u_1(x))$, sendo $f(\cdot)$ uma função estritamente crescente.

Utilidade Média-Variância

- Até o momento, assumimos que a satisfação decorrente de uma loteria depende da distribuição completa dos retornos dos ativos.
- No entanto, em muitos casos, gostaríamos de nos concentrar apenas nos dois primeiros momentos da distribuição dos possíveis resultados.
- Em especial, quando temos que a riqueza terminal siga uma distribuição normal. Como a distribuição é completamente caracterizada pela média e variância, podemos falar de uma função de utilidade que se foca apenas nestes momentos da distribuição.
- Uma função utilidade interessante para isso é a $u(w) = -e^{-rw}$

Utilidade Média-Variância

- A utilidade esperada, neste caso, é dada por:

$$V(w) = -\int e^{-rw} f(w) dw$$

- Esta é a função geradora de momentos para uma distribuição normal, ou:

$$V(w) = -e^{-r(\bar{w}+r\sigma_w^2/2)}$$

- Podemos fazer uma transformação monotônica – tirar ln dos dois lados, e chegamos na seguinte função utilidade:

$$V^*(w) = \bar{w} + \frac{r\sigma_w^2}{2}$$