TEORIA DE PRECIFICAÇÃO POR ARBITRAGEM

Vamos trabalhar um pouco mais a idéia de teoria de precificação por arbitragem. Vamos começar mostrando que se uma carteira é bem diversificada, apenas o risco de fator existe. Ou seja, em uma carteira com n ativos e pesos w_i tais que $\sum_i w_i = 1$, temos que a taxa de retorno do portifólio é dada por:

$$
\begin{aligned}
r_P &= E(r_P) + \beta_P F + e_P \\
\sigma_P^2 &= \beta_P^2 \sigma_F^2 + \sigma^2(e_P) \\
\sigma^2(e_P) &= \sum_i w_i^2 \sigma^2(e_i)
\end{aligned}
$$

Se $w_i = \frac{1}{n}$, temos que $\sigma^2(e_P) = \frac{1}{n} \sum {}^{\sigma^2(e_i)}/_{n} = \bar{\sigma}^2(e_i)/n$. Isso mostra que o risco do portifólio vai declinando à medida em que adicionamos mais ativos. Neste sentido, os retornos observados estariam bem certinhos juntos a uma linha em um plano cartesiano composto pelo retorno do ativo e o movimento do fator F. Primeiro ponto importante:

Proposition 1. *Toda carteira bem diversificada com betas iguais TEM DE TER mesmos retornos esperados, por arbitragem*

Proof. Imagine que não fosse verdade, e que tivéssemos uma carteira P que tem $E(r_P) = 3\%$, e outra carteira Q que tivesse $E(r_Q) = 5\%$. Neste caso, poderíamos ter uma posição vendida na carteira P e uma posição comprada em Q e ganharíamos 2% em cima de nada! □

E se tivéssemos carteiras com diferentes betas? Ainda assim, poderíamos construir uma carteira de arbitragem e mostrar que os prêmios de risco são proporcionais aos betas.

Proposition 2. *Cada carteira com betas diferentes tem que ter um retorno esperado dado pela linha que liga o beta do portifólio bem diversificado ao ativo livre de risco.*

Proof. Suponha que isso não seja verdade. Se não for verdade, o ativo tá pra cima ou pra baixo da linha. Se estiver abaixo da linha, você vende o ativo e compra a combinação entre o ativo livre de risco e o portifólio bem diversificado que é exatamente "para cima" e em cima da linha em relação ao ativo precificado de forma incorreta. Caso o ativo esteja precificado errado, você compra o ativo e vende a combinação exatamente "pra baixo" e em cima da linha em relação ao ponto. □

Podemos notar que, se a carteira de mercado for uma carteira bem diversificada, temos que ela está na SML e o retorno esperado de qualquer carteira bem diversificada é dado por $E(r_P) = r_f + \beta_P(E(r_M) - r_f)$.

E para o caso de mais de um fator? Aí precisamos construir os chamados "portfolio de fatores", que são carteiras bem diversificadas que possuem o $\beta = 1$ para apenas um dos fatores e zero para o caso de todos os outros fatores. Neste caso, qualquer retorno de carteira pode ser construído a partir destes "portifólio de fatores". Imagine que tenhamos uma carteira P que tem betas em cada um dos dois fatores iguais a β_{P1} e β_{P2}. Em equilíbrio, esta carteira tem que render isso aqui:

$$E(r_P) = r_f + \beta_{P1}(E(F_1) - r_f) + \beta_{P2}(E(F_2) - r_f)$$

Porque se não render, posso comprar ou vender uma carteira Q composta pelo seguinte:

- β_{P1} no primeiro portifólio de fator
- β_{P2} no segundo portifólio de fator
- $(1 - \beta_{P1} - \beta_{P2})$ na taxa livre de risco

O retorno deste portifólio competidor é dado por:

$$E(r_Q) = \beta_{P1}E(F_1) + \beta_{P2}E(F_2) + (1 - \beta_{P1} - \beta_{P2})r_f$$

Essas duas coisas, por arbitragem, tem que render a mesma coisa.