ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos
PSI - EPUSP

PSI 3031/3212 – LABORATÓRIO DE CIRCUITOS ELETRICOS

Edição 2018

INTRODUÇÃO TEÓRICA

MEDIDA DA CONSTANTE DE TEMPO E TEMPO DE SUBIDA EM REDES DE PRIMEIRA ORDEM RC e RL

Walter J. Salcedo/ Roberto Onmori
Revisão: Leopoldo Yoshioka

1 – Objetivos

Nesta experiência queremos que os alunos desenvolvam as seguintes capacidades:

- Analisar Circuitos de 1.ª ordem, *RC* e *RL*, com resposta natural, forçada e em regime permanente.
- Medir a constante de tempo e o tempo de subida (ou descida) em circuitos RC e RL.
- Verificar a relação entre tempo de subida e frequência de corte;
- Utilizar o tempo de carga e descarga de circuito RC para construir temporizadores e osciladores.

2.- Análise de Circuitos de 1ª ordem RC e RL

Em experiências anteriores aprendemos sobre o comportamento de circuitos RC ou RL em **regime permanente senoidal**. Verificamos, por exemplo, que um circuito RC série se comporta como um filtro passa-baixa. Nesta experiência estudaremos o comportamento desses circuitos no **domínio do tempo**, tendo como foco o comportamento do circuito durante o transitório (período em que o circuito ainda não se estabilizou, por exemplo, imediatamente após a energização da fonte ou do gerador).

Circuitos que contém elementos reativos como capacitor e indutor são bem descritos por equações diferenciais sendo que a solução define a dinâmica temporal das variáveis de tensão e corrente elétrica.

A resposta do circuito pode ser natural ou forçada.

Na resposta natural, as energias armazenadas nos capacitores ou indutores são dissipadas pelos elementos resistivos do circuito. O comportamento temporal pode ser caracterizado pelo parâmetro denominado constante de tempo que indica o tempo necessário para a extinção do regime natural.

Na resposta forçada destaca-se o interesse em particular o estudo da solução imposta por fontes constantes e fontes senoidais, muito importante na análise de circuitos.

Obs.:É recomendada a leitura da apostila "Teoria de Redes de 1ª. ordem" de autoria do prof. Magno.

2.1 - Constante de tempo de descarga de circuitos RC e RL

A solução de uma equação diferencial é composta por duas parcelas essencialmente distintas: 1) **solução ou resposta natural**, que determina a dinâmica das variáveis na ausência de fontes independentes e 2) **solução forçada**, que determina a dinâmica das variáveis na presença de fontes independentes.

Considere-se o circuito *RC* e RL representado na Figura 1:

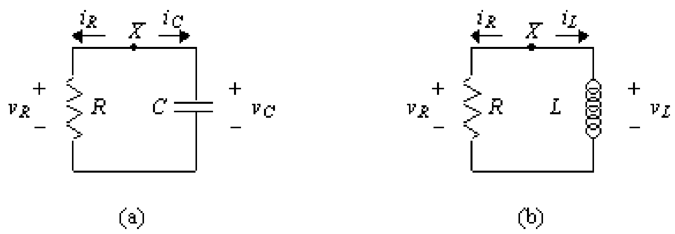

Figura 1 – Circuitos *RC* (a) e *RL* (b) de 1ª ordem.

A equação diferencial linear de 1.ª ordem que descreve o circuito da **Fig. 1-a** será:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_C(t) = 0 \qquad (1)$$

cuja solução determina a dinâmica temporal da tensão e da corrente aos terminais do capacitor e da resistência.

Analogamente para o indutor conduzindo à equação diferencial linear de 1.ª ordem:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = 0 \qquad (2)$$

A solução geral para a equação de diferencial linear de 1.ª ordem será do tipo:

$$x(t) = A\,e^{\frac{t}{\tau}} \qquad (3)$$

assim, e a solução para o capacitor da **Fig. 1-a** será:

$$Vc(t) = A\ e^{\frac{t}{\tau}} \qquad (4)$$

onde $\boldsymbol{\tau = R\ C}$. A curva correspondente à resposta natural, $v_c(t)$, é mostrada na **Fig. 2**:

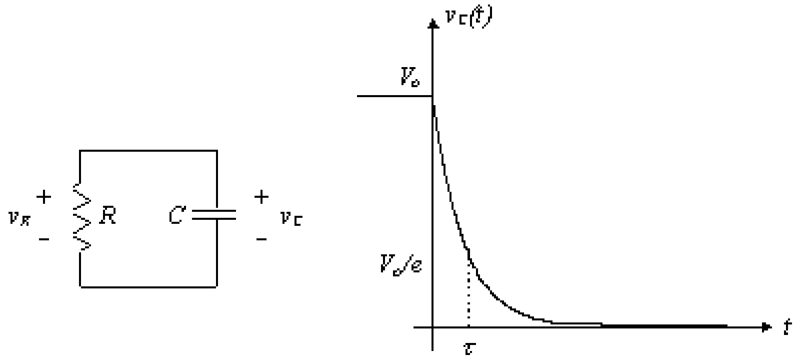

Figura 2 – Curva de tensão do capacitor - resposta natural.

Analogamente para o indutor:

$$i_L(t) = A\ e^{\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

onde $\boldsymbol{\tau = L/R}$. A curva correspondente à resposta natural, $i_L(t)$, é mostrada na **Fig. 3**:

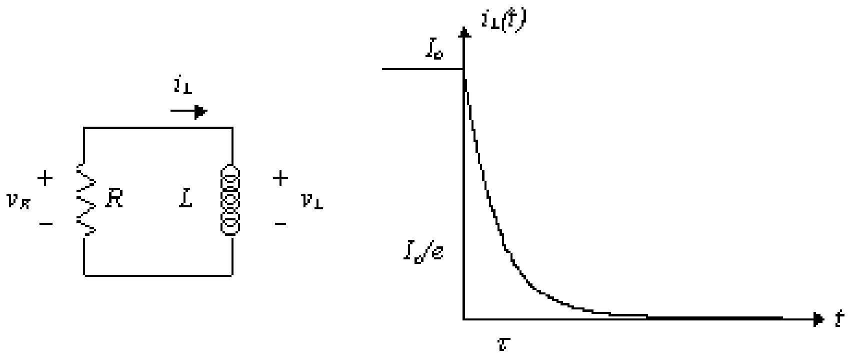

Figura 3 – Curva de corrente do indutor - resposta natural.

Mudando-se os valores de R, pode-se variar o tempo de resposta do circuito (τ/10, τ, 2τ e 10τ) conforme ilustra a **Fig. 3**.

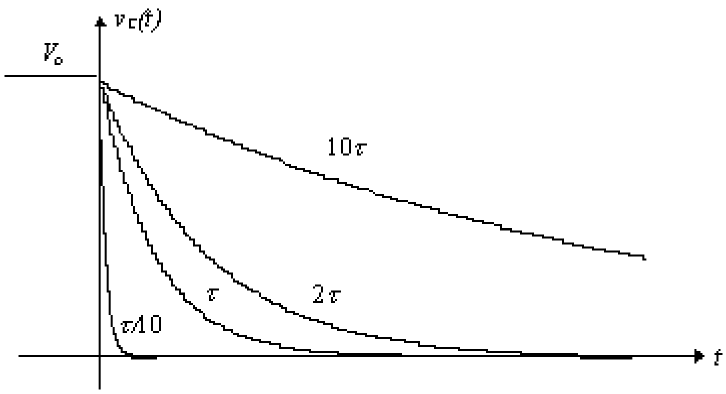

Figura 4 – Solução natural de um circuito *RC* em função da constante de tempo

2.2 Constante de tempo de circuitos RC e RL

A constante de tempo do circuito constitui uma medida do tempo necessário para a extinção (parcial) do regime natural. Verifica-se assim que no instante de tempo $t = \tau$ as variáveis $\boldsymbol{v_C(t)}$ ou $\boldsymbol{i_L(t)}$ se encontram já reduzidas a uma fração $1/e$ (~ 0,37%) do seu valor inicial.

2.3.- Medida da constante de tempo de carga circuitos RC e RL

2.4 Solução Forçada Constante (degrau) de um circuito *RC*

Considere-se o circuito *RC* (com fonte independente) representado na **Fig. 5** e admitir a fonte de tensão $v_s(t)$ definindo um sinal em degrau com origem em t = 0s e amplitude V_s (=$\boldsymbol{E}$), ou seja, $v_s(t) = V_s.u(t)$. Admitir ainda no instante de tempo t = 0s a tensão aos terminais do condensador é $v_C(0) = V_o$.

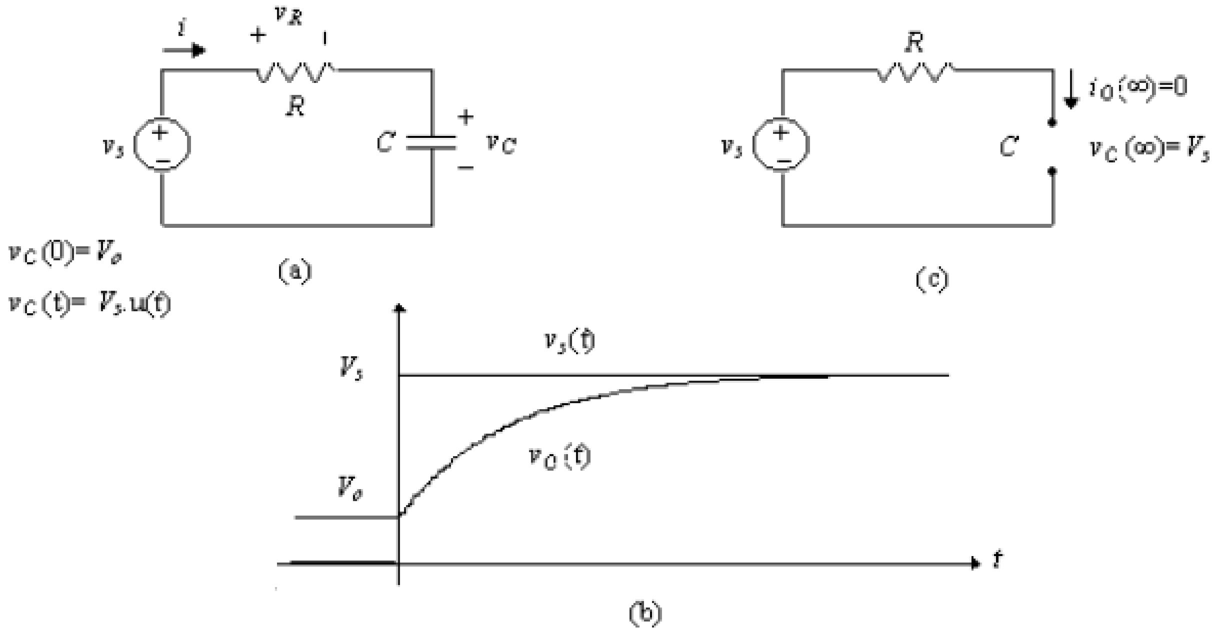

Figura 5 – Solução forçada (degrau) do circuito RC.

A solução será dada por:

$$v_C(t) = V_s + (V_o - V_s)e^{-t/\tau} \quad (6)$$

No caso do circuito R.C a tensão de saída do capacitor (V_C) será: $v_C = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, onde $\boldsymbol{\tau = R.C}$. A tensão final tende ao valor de "***E***"

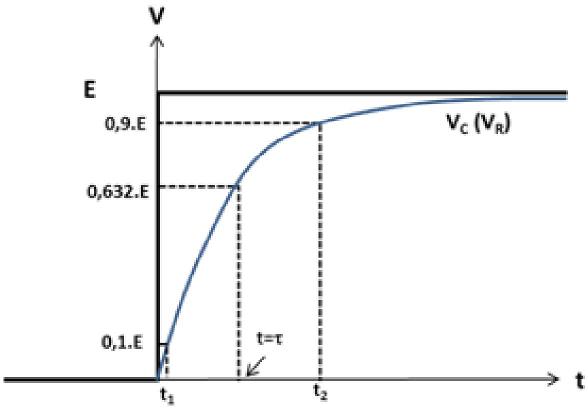

Figura 6 – Determinação do tempo de resposta τ do circuito RC.

Nestes circuitos a tensão de saída no instante **t = τ** é igual a **0,632** vezes o estado final (***E***).

Tempo de subida

Em engenharia é muito comum a utilização de um parâmetro denominado "tempo de subida" para caracterizar comportamento de sistemas de 1ª ordem. O tempo de subida é definida como sendo o intervalo de tempo que compreende os instantes onde a tensão (resposta do sistema) encontra-se entre **10% (t_1) e 90% (t_2)** do valor final respectivamente.

$$t_r = t_2 - t_1 \qquad (7)$$

No Circuito RC a frequência de corte para a resposta de estado estacionário acontece em $f_c = {}^{1}/_{(2\pi R.C)}$, assim o produto $\boldsymbol{f_c.t_r}$ será igual a:

$$f_c t_r = \frac{\ln(9)}{2\pi} \qquad (8)$$

Observe que o produto é uma constante, ou seja, um sistema com tempo de subida pequeno (variação rápida) corresponde a um sistema com frequência de corte elevada (maior banda). Enquanto que se o tempo de subida é grande (variação lenta) corresponde a um sistema com frequência de corte reduzida (menor banda).

Exemplo: Vamos considerar um circuito com constante de tempo τ. Se este circuito for excitado com uma onda quadrada de baixa frequência (**1/T** << **1/τ**) obteremos uma resposta em que a tensão de saída (sobre o capacitor) alcançará o valor de patamar (estabilização) bem antes da mudança de estado do sinal de excitação conforme mostrado **Fig. 7**.

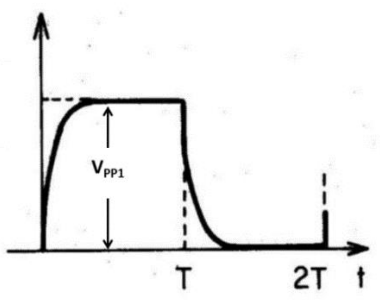

Figura 7 – Tensão de saída no capacitor quando excitado com uma onda quadrada de baixa frequência (1/T << 1/τ)

2.5 Solução Forçada Senoidal de um circuito *RC*

Como visto nas experiências anteriores, é possível usar um sinal senoidal em um circuito RC e obter a sua resposta em função da frequência conforme a **Fig. 8**.

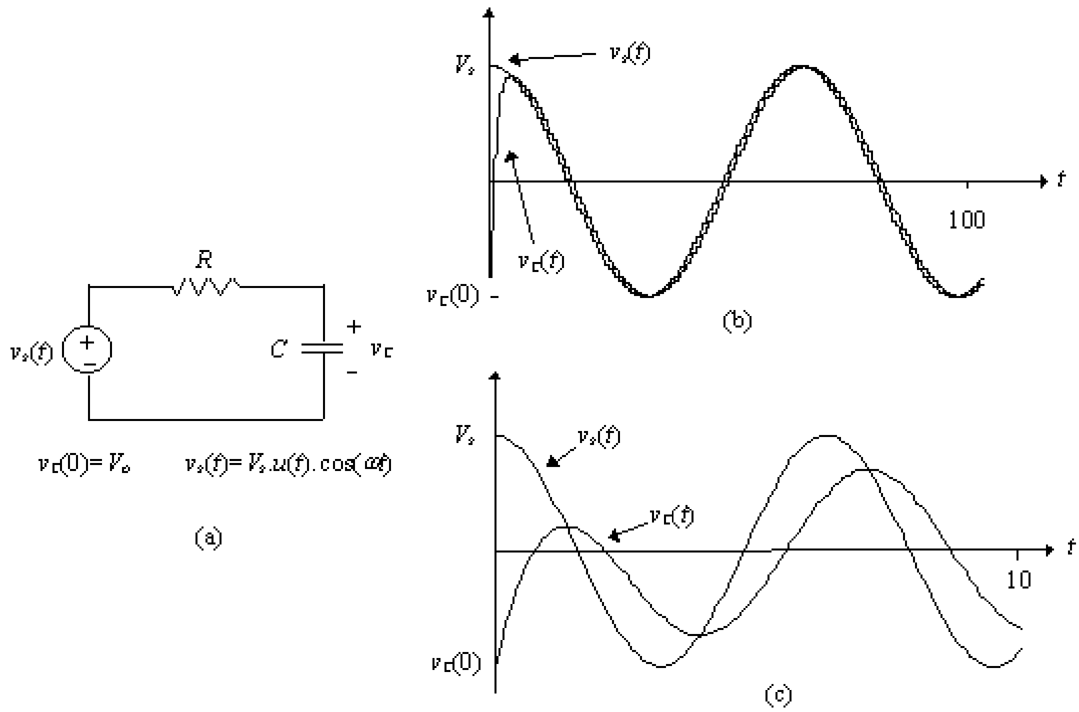

Figura 8 – Respostas forçada senoidal do circuito RC.

Na figura 8 representam-se as dinâmicas temporais de um circuito RC de 1.ª ordem com condição inicial distinta de zero e termo forçado senoidal.

A frequência do sinal forçado é $\omega = (10RC)^{-1}$ em (b) e $\omega = (RC)^{-1}$ em (c).

Nesta figura são visíveis três características fundamentais do regime forçado senoidal:

(i) após a extinção da solução natural, a tensão aos terminais do capacitor segue a forma senoidal da fonte independente, designadamente a mesma frequência;

(ii) existe uma diferença entre as amplitudes das senóides aplicada e medida aos terminais do capacitor, que se constata depender da relação entre a frequência da senóide e os parâmetros *R* e *C* do circuito;

(iii) existe uma diferença de fase entre as senóides aplicada e medida aos terminais do capacitor, que mais uma vez se constata ser uma função da relação entre a frequência da senóides e os parâmetros *R* e *C* do circuito.

3.- Aplicação de um circuito RC – Oscilador de onda quadrada.

Uma das aplicações de um circuito RC é o oscilador de onda quadrada. Para implementar o oscilador é necessário combinar um circuito RC com um circuito comparador.

Primeiro analisaremos o funcionamento de um circuito comparador e posteriormente o oscilador de onda quadrada.

3.1. Comparador (Circuito de disparo – Schmitt invertido)

No circuito da **Fig. 9** a tensão de entrada V_{in} alimenta a entrada V_- do amplificador operacional que possui uma realimentação positiva (ver eq. 9).

O comportamento desse circuito, atuando como comparador, pode ser descrita por meio de um gráfico de V_0 em função de V_{in}, conforme mostrada na *Fig. 10* (conhecida como curva de histereses, pois o caminho percorrido é distinto).

A mudança de estado da tensão de saída (V_0) de V_H ***(high)*** para V_L ***(low)*** ocorre nas tensões V_{TU} ("2") e V_{TL} *("4")*, respectivamente. A tensão na entrada (V+) do amplificador operacional é função do sinal de saída ***Vo*** como pode ser visto na Eq.9:

$$V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0 \qquad (9).$$

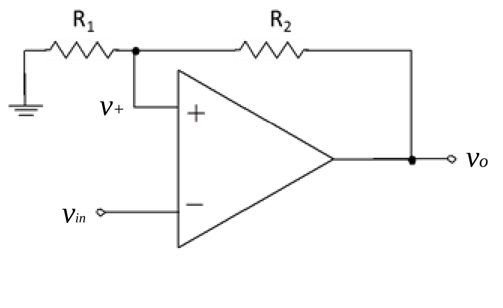

Figura 9 – Circuito de um amplificador na configuração "comparador".

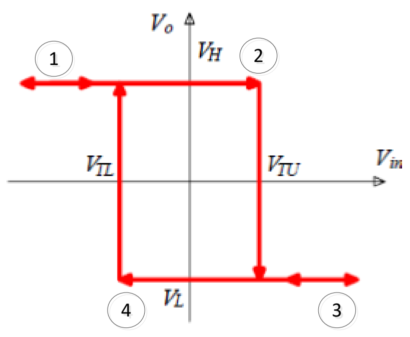

Figura 10 - Curva de histerese do "comparador".

Vamos analisar o comportamento do circuito (**Fig. 9**) passo-a-passo, supondo inicialmente que o nível de saída encontra-se em $V_0 = V_H$.

- Enquanto nível de entrada for menor que $\boldsymbol{V_{TU}}$, intervalo entre ("1") e ("2"), a saída permanecerá em $\boldsymbol{V_H}$.
- Quando a entrada se tornar maior que $\boldsymbol{V_{TU}}$ a saída mudará para o nível $\boldsymbol{V_L}$.
- Enquanto nível de entrada for maior que $\boldsymbol{V_{TL}}$, intervalo entre ("3") e ("4"), a saída permanecerá em $\boldsymbol{V_L}$.
- Quando a entrada se tornar menor que $\boldsymbol{V_{TL}}$ a saída mudará para o nível $\boldsymbol{V_H}$, ou seja para a condição inicial

As tensões limiares são dadas pelas seguintes expressões:

$$V_{in} = V_{TU} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_H \quad (10)$$

$$V_{in} = V_{TL} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_L \quad (11)$$

3.2. Oscilador de onda quadrada

Para fazer um oscilador, modificamos o circuito da **Fig. 9**, eliminando a excitação externa ($\boldsymbol{V_{in}}$) e acrescentando o circuito RC, conforme mostrado na **Fig. 11**.

Observe que o circuito da **Fig. 11** possui concomitantemente uma realimentação positiva, através do resistor $\boldsymbol{R_2}$, e uma realimentação negativa, através do resistor $\boldsymbol{R_F}$.

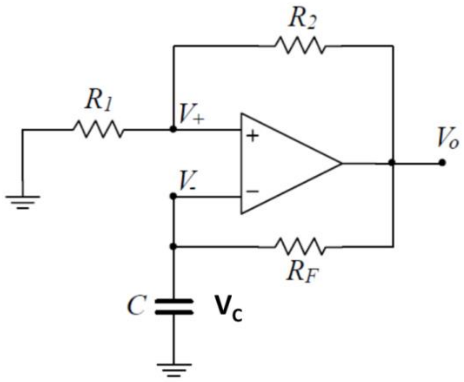

Figura 11 - Oscilador com amplificador operacional.

O processo de oscilação ocorre da seguinte forma:

- Como o amplificador operacional está realimentado positivamente a saída, $\boldsymbol{V_0}$, poderá estar somente em dois estados: saturação positiva ou saturação negativa.

- Se a saída estiver em saturação positiva (nível de tensão positivo) fluirá uma corrente pelo capacitor em direção ao terra, fazendo com que a tensão ***Vc*** aumente exponencialmente (carga).
- Se a saída estiver em saturação negativa (nível de tensão negativa) fluirá uma corrente pelo capacitor em direção inversa à situação anterior, fazendo com que a tensão ***Vc*** diminua exponencialmente (descarga).
- O resultado é mostrado na **Fig.12** onde podemos observar uma onda quadra na saída e uma onda do tipo "dente de serra curva" no capacitor.
- Observe que quando a tensão sobre o capacitor atingir o nível de +2,5V(na subida) a tensão de saída muda de estado, passando do nível **positivo** para o nível **negativo** e concomitantemente, a tensão do capacitor começa a diminuir.
- Por outro lado, quando a tensão sobre o capacitor atingir o nível de -2,5V(na descida) a tensão de saída muda novamente de estado, passando do nível **negativo** para o nível **positivo** e concomitantemente a tensão no capacitor começa a aumentar.

A Fig. 12 mostra o comportamento do circuito da Fig. 11.

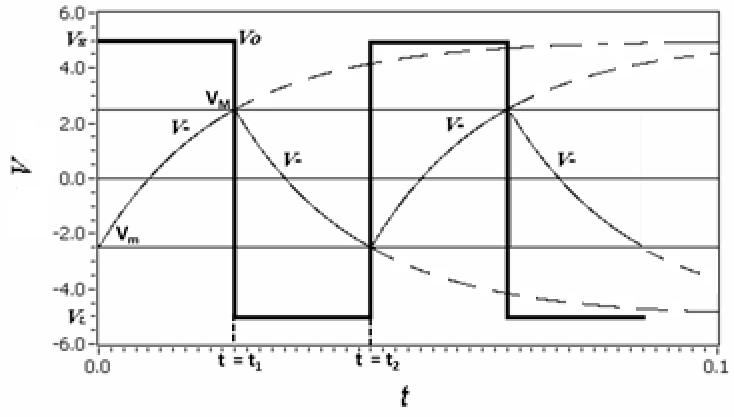

Figura 12 Gráfico da tensão sobre o capacitor e da saída do oscilador.

Como pode ser demonstrado, o período da onda quadrada é expresso por:

$$T = 2.t_1 = 2R_F C.\ln\left(1 + 2\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (12)$$

Observe que o período é uma função do produto R_FC e da razão R_1/R_2.

Exercício: Demonstre a expressão 12.