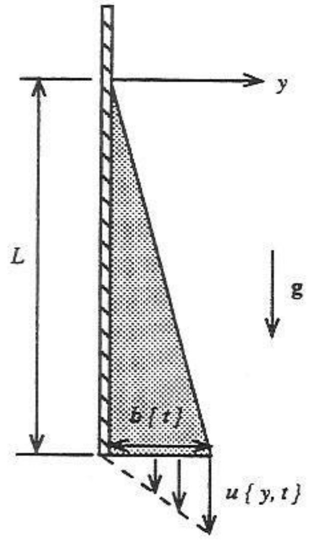
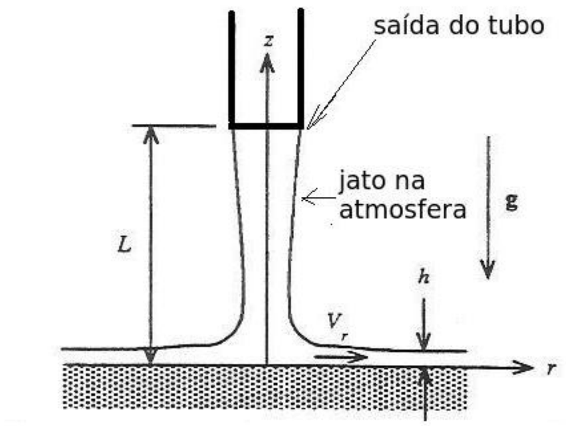
Prova Substitutiva de PME3332 – 13/12/2017

1ª Questão (2,5 pontos): Uma placa fina é mergulhada em um líquido muito viscoso até uma profundidade L, e então retirada. O líquido que aderiu à placa começa a escorrer, formando o perfil de velocidades da figura. A largura $b(t)$ da camada de líquido na extremidade inferior da placa diminui com o tempo à medida que o líquido escorre, mas a camada de líquido aderida à placa mantém a forma triangular. O perfil de velocidades na extremidade inferior é linear, dado por:

$u(y) = \dfrac{U\,y}{b(t)}$ onde U é constante. Se $b(t) = b_o$ para $t = 0$, obtenha a expressão de $b(t)$. Dado: $\dfrac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 0$



Problema 1



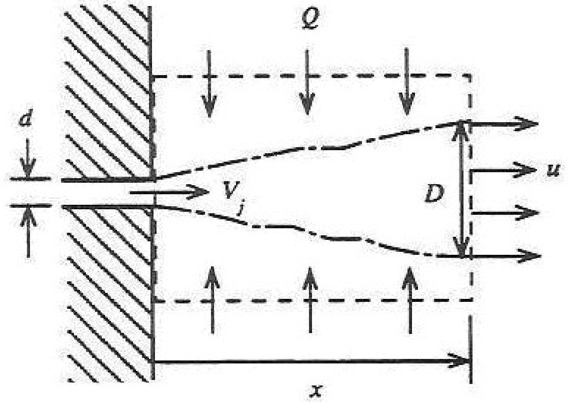
Problema 2

2ª Questão (2,5 pontos): Água deixa com velocidade constante e uniforme um tubo vertical descendo na atmosfera em direção a uma placa plana localizada a uma distância L abaixo da saída do tubo. A vazão de água é Q e a área do tubo é A.
Sobre a placa o jato de água se distribui num escoamento horizontal radial, formando uma camada $h(r)$. O perfil de velocidades desse escoamento pode ser considerado uniforme, dado por $V_r(r)$. Considerando $h << L$, obtenha expressões para $h(r)$ e $V_r(r)$.

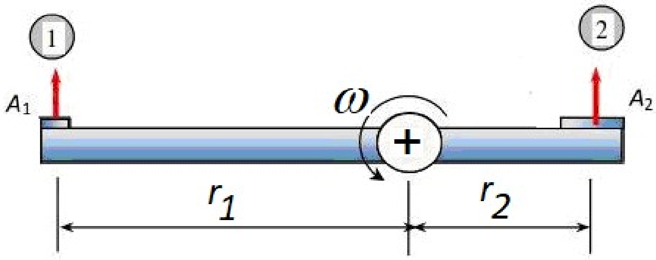
Dado: $\dfrac{V^2}{2} + \dfrac{p}{\rho} + g\,z = \text{constante}$

3ª Questão (2,5 pontos): Um jato axissimétrico de ar é ejetado na atmosfera com velocidade V_j a partir de um tubo de diâmetro d embutido em uma parede. Considere que o jato possui uma velocidade uniforme u ao longo de sua seção transversal de diâmetro D. O diâmetro do jato aumenta linearmente com x de acordo com a relação $D = d + Kx$, onde K é uma constante. O jato arrasta e incorpora ar circundante, que escoa radialmente na direção do jato. Considerando escoamento permanente, incompressível, sem atrito viscoso, sem forças gravitacionais e que todo o jato está imerso na pressão atmosférica: (a) obtenha a expressão da velocidade u como função de x, V_j, d e K; e (b) Obtenha a expressão da vazão volumétrica $Q(x)$ de ar atmosférico incorporado pelo jato entre a parede e a posição x genérica como função de x, V_j, d e K.

Dados: $\sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho \vec{v}\, d\forall + \int_{SC} \vec{v}\, \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS$ $\qquad \dfrac{\partial m_{\forall C}}{\partial t} + \int_{SC} \rho \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = 0$



Problema 3



Problema 4

4ª Questão (2,5 pontos): Uma vazão Q de água se distribui igualmente entre os dois lados do dispositivo da figura, de comprimentos r_1 e r_2 e áreas de saída para a atmosfera A_1 e A_2 diferentes. Considere regime permanente e escoamento incompressível. Considerando o atrito no eixo nulo e desprezando efeitos gravitacionais, obtenha a expressão da rotação ω como função de Q, r_1, r_2, A_1 e A_2.

Dado: $\sum \vec{M}_{ext} = \dfrac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, \vec{r} \wedge \vec{v}\, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v}\, \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}\, dS$

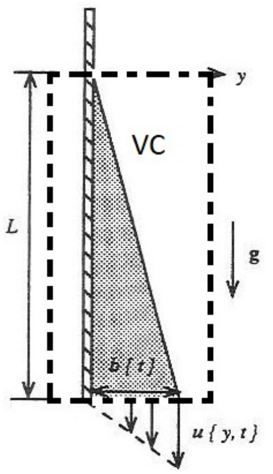
$$\sum \vec{M}_{ext} = \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \vec{a}_a \rho\, d\forall + \int_{\forall C} \vec{r} \wedge \vec{a}_c \rho\, d\forall + \frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, \vec{r} \wedge \vec{v}_{rel}\, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{v}_{rel}\, \rho \vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}\, dS$$

GABARITO

1ª Questão: A massa do volume de controle, se considerarmos uma altura h ortogonal ao plano da figura, é:

$$m_{VC} = \frac{1}{2} b(t)\, Lh$$

Se considerarmos um VC como na figura:



Teremos, pela equação da continuidade:

$$\frac{d\, m_{\forall C}}{dt} + \int_{SC} \rho \vec{\upsilon} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{2} Lh \frac{db}{dt} + \int_0^b \frac{Uy}{b} h\, dy = 0$$

Isso resulta:

$$\frac{1}{2} Lh \frac{db}{dt} + \frac{U}{b} h \frac{b^2}{2} = 0$$

Logo:

$$\frac{1}{b} db = -\frac{U}{L} dt$$

Integrando:

$$\ln b = -\frac{U}{L} t + const$$

Mas, para $t = 0$, $b = b_o$, logo:

$const = \ln b_o$

Assim:

$$\ln\left(\frac{b}{b_o}\right) = -\frac{U}{L} t$$

Que resulta:

$$\boxed{b = b_o\, e^{-\frac{U}{L} t}}$$

2ª Questão: Se aplicarmos a equação de Bernoulli a uma linha de corrente junto à superfície externa do jato, onde a pressão é atmosférica:

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p_{atm}}{\rho}+gL=\frac{V_r^2}{2}+\frac{p_{atm}}{\rho}+gh$$

Onde $V=\dfrac{Q}{A}$ é a velocidade do jato na saída do tubo e $V_r=\dfrac{Q}{2\pi\, r\, h}$ é a velocidade radial.

Temos então:

$$V_r^2=V^2+2g\,(L-h)$$

Como $h << L$:

$$V_r^2=V^2+2g\,L$$

Logo:

$$\boxed{V_r=\sqrt{\frac{Q^2}{A^2}+2gL}}$$

E temos h dado por:

$$\boxed{h=\frac{Q}{2\pi\, r\, V_r}}$$

Com V_r dado pela equação anterior.

3ª Questão: Aplicando a equação da quantidade de movimento e lembrando que, se o jato está todo na pressão atmosférica e não há atritos e efeitos gravitacionais, a somatória das forças externas é nula:

$$\underbrace{\sum\vec{F}_{ext}}_{0}=\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C}\rho\,\vec{\upsilon}\,d\forall}_{0}+\int_{SC}\vec{\upsilon}\,\rho\,\vec{\upsilon}\cdot\vec{n}\,dS\ \Rightarrow\ \rho u^2\,\frac{\pi D^2}{4}-\rho V_j^2\,\frac{\rho d^2}{4}=0$$

Logo,

$$u=V_j\,\frac{d}{D}$$

Ou

$$\boxed{u=V_j\,\frac{d}{d+K\,x}}$$

Aplicando a equação da continuidade:

$$Q+V_j\,\frac{\pi d^2}{4}=u\,\frac{\pi D^2}{4}$$

Substituindo as expressões para u e D:

$$Q+V_j\,\frac{\pi d^2}{4}=V_j\,\frac{d}{d+K\,x}\,\frac{\pi\left(d+Kx\right)^2}{4}$$

Resulta:

$$\boxed{Q = V_j \, \frac{\pi \, d \, K \, x}{4}}$$

4ª Questão (2,5 pontos): Se o atrito no eixo é nulo e os jatos saem para a atmosfera, os momentos dos fluxos de quantidade de movimento dos jatos tem que se equilibrar. Assim, considerando um volume de controle rotativo ao redor do dispositivo e trabalhando com velocidades absolutas:

$$\underbrace{\sum \vec{M}_{ext}}_{0} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \, \vec{r} \wedge \vec{\upsilon} \, d\forall}_{0} + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{\upsilon} \, \rho \, \vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n} \, dS \;\Rightarrow\; \int_{A_1} \vec{r} \wedge \vec{\upsilon} \, \rho \, \vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{A_2} \vec{r} \wedge \vec{\upsilon} \, \rho \, \vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

A velocidade relativa em ambas as seções de saída é dada por $Q/(2A)$. Nas velocidades absolutas devemos levar em conta o sentido de rotação. Assim:

$$\int_{A_1} r_1 \vec{e}_r \wedge \left(-\frac{Q}{2A_1} + \omega \, r_1 \right) \vec{e}_\theta \, \rho \underbrace{\vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n}}_{+\frac{Q}{2A_1}} \, dS + \int_{A_2} r_2 \, \vec{e}_r \wedge \left(\frac{Q}{2A_2} + \omega \, r_2 \right) \vec{e}_r \, \rho \underbrace{\vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n}}_{+\frac{Q}{2A_2}} \, dS = 0$$

Isso resulta:

$$\left(-\frac{Q}{2A_1} r_1 + \omega \, r_1^2 \right) \frac{\rho Q}{2} + \left(\frac{Q}{2A_2} r_2 + \omega \, r_2^2 \right) \frac{\rho Q}{2} = 0$$

Logo:

$$\omega \left(r_1^2 + r_2^2 \right) = \frac{Q}{2} \left(\frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right)$$

Que resulta:

$$\boxed{\omega = \frac{Q}{2\left(r_1^2 + r_2^2\right)} \left(\frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2} \right)}$$

Solução usando movimento relativo:

A aceleração de arrastamento é:

$$\vec{a}_a = -\omega^2 \, r \, \vec{e}_r$$

Logo, como a aceleração de arrastamento é radial, $\vec{r} \wedge \vec{a}_a = 0$

A aceleração de Coriolis é:

$$\vec{a}_c = 2 \, \vec{\omega} \wedge \vec{\upsilon}_{rel} = 2 \, \omega \, \vec{e}_z \wedge \frac{Q}{2A} \vec{e}_r = \frac{\omega \, Q}{A} \vec{e}_\theta$$

Assim, como os momentos externos são nulos (não temos atrito no eixo), o regime é permanente e a aceleração de arrastamento não exerce torque, temos:

$$\int_{\forall C} \rho \, \vec{r} \wedge \vec{a}_c \, d\forall + \int_{SC} \vec{r} \wedge \vec{\upsilon}_{rel} \, \rho \, \vec{\upsilon}_{rel} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

Isso resulta:

$$\int_0^{r_1} r\,\vec{e}_r \wedge \frac{\omega Q}{A}\vec{e}_\theta\,\rho A\,dr + \int_0^{r_2} r\,\vec{e}_r \wedge \frac{\omega Q}{A}\vec{e}_\theta\,\rho A\,dr + \int_{A_1} r_1\,\vec{e}_r \wedge \left(-\frac{Q}{2A_1}\right)\vec{e}_\theta\,\rho\,\vec{\upsilon}_{rel}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{A_2} r_2\,\vec{e}_r \wedge \frac{Q}{2A_2}\vec{e}_\theta\,\rho\,\vec{\upsilon}_{rel}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

Que resulta:

$$\rho\omega Q\frac{r_1^2}{2}\vec{e}_z + \rho\omega Q\frac{r_2^2}{2}\vec{e}_z - \rho\frac{Q\,r_1}{2A_1}\frac{Q}{2}\vec{e}_z + \rho\frac{Q\,r_2}{2A_2}\frac{Q}{2}\vec{e}_z = 0$$

Ou seja:

$$\omega\left(r_1^2 + r_2^2\right) - \frac{Q}{2}\left(\frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2}\right) = 0$$

Que resulta, como no caso anterior usando velocidades absolutas:

$$\boxed{\omega = \frac{Q}{2\left(r_1^2 + r_2^2\right)}\left(\frac{r_1}{A_1} - \frac{r_2}{A_2}\right)}$$