

Problema de Três Corpos Restrito - Pontos de Lagrange

Seminário de Mecânica II. 2º Semestre - 2017
Professor Airton Deppman

Rafael Bicudo Ribeiro	(9083010)
Rodrigo Silva Malaquias dos Santos	(8942318)
Stefano Oliveira de Souza	(8941787)
Thiago de Souza Duarte	(8941724)
Ulisses Portugal	(9301645)

Resumo

A partir de motivações históricas, um sistema formado por três corpos se destaca como objeto de estudo relevante. Considerando o caso particular de dois corpos mais massivos que um terceiro, dispomos do formalismo de Hamilton, que através de transformações canônicas convenientes, resulta na determinação das equações do movimento associadas e no posterior estudo de pontos de estabilidade, conhecidos como pontos de Lagrange.

1 Introdução

Dado um sistema de três corpos interagindo gravitacionalmente, cuja configuração inicial é conhecida, como o sistema evoluirá com o passar do tempo? Isto é, quais serão as posições e velocidades de cada corpo em um dado instante de tempo?

Este problema ficou conhecido como *Problema de três corpos* pela primeira vez em um trabalho do francês Jean d’Alambert, em 1747, muito embora no final do século XVII Newton houvesse tentado resolvê-lo com auxílio de aproximações que levaram a resultados muito próximos do observado [4]. Com o passar do tempo, soluções mais refinadas foram determinadas. Entre 1767 e 1772, Euler e Lagrange encontraram soluções para casos particulares em que as massas eram conservadas. Em 1836, Jacobi determinou uma constante de movimento para uma aproximação circular e em 1878, Hill mostrou como usar a integral de Jacobi para determinar a estabilidade dessa versão do problema. No mesmo ano, o rei da Suécia, Oscar II, ofereceu um prêmio a quem fosse capaz de resolver o problema de três corpos aplicado à estabilidade do sistema solar. Em um primeiro momento, Henri Poincaré foi o vencedor, apresentando também soluções para o caso particular, em que uma das massas é muito pequena. Entretanto, subsequentemente Poincaré encontrou erros no trabalho vencedor o que acarretou na retirada de circulação desses resultados e na posterior publicação de um extenso trabalho sobre o problema. Neste, estavam provas da não-integrabilidade do problema e descobertas sobre órbitas caóticas.

Após Poincaré, outros trabalhos provaram de forma mais rigorosa a não-integrabilidade e o problema de três corpos continuou sendo estudado do ponto de vista analítico levando a uma posterior

abordagem numérica. Contudo, diante da impossibilidade da obtenção de uma solução exata, os chamados problemas de três corpos restritos (RTBP) foram bastante explorados devido a aplicabilidade em sistemas de interesse da Astronomia. A restrição está no fato de uma das massas ser pequena diante das duas outras. O sistema Sol-Terra-lua é um ótimo exemplo, uma vez que a relação entre as massas do sistema é aproximadamente 300000:1:0,01. O mesmo vale para o sistema Terra-lua-satélite ou mesmo Sol-Terra-sonda.

2 Metodologia

Como apresentado anteriormente, vamos derivar as equações do movimento e os pontos de Lagrange usando uma abordagem hamiltoniana. Por simplicidade, usaremos unidades normalizadas de forma que a constante gravitacional seja $G = 1$, as massas dos corpos de maior massa, conhecidos como *primários* sejam μ e $1 - \mu$ e e o período orbital 2π . Chamaremos de R a distância entre as primárias, p o semi-latus rectum¹ da órbita, e a excentricidade e ν a anomalia verdadeira (fig. 1), que é fundamental para a determinação de um objeto em sua órbita.

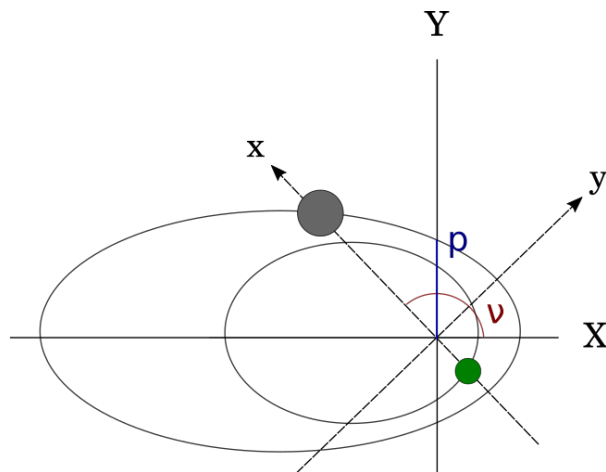


Figura 1: Representação esquemática das órbitas de dois corpos interagentes.

Os corpos primários constituem um problema de dois corpos, cuja solução estabelece uma relação entre R e ν ,

$$R = \frac{p}{1 + e \cos \nu} . \quad (1)$$

Com ν satisfazendo a equação,

$$\dot{\nu} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p^{3/2}} = \frac{\sqrt{p}}{R^2} . \quad (2)$$

¹O semi-latus rectum é a distância entre a reta diretriz da secção cônica e o foco.

Usaremos coordenadas esféricas para descrever o terceiro corpo, num referencial que gira junto com os primários, com origem no centro de massa. Os ângulos ϕ e θ são, respectivamente, o polar e o azimutal. As distâncias em relação aos primários são obtidas geometricamente e dadas por,

$$r_1^2 = r^2 + \mu^2 R^2 - 2\mu r R \text{sen}\phi \cos\theta, \quad (3)$$

$$r_2^2 = r^2 + (1 - \mu)^2 R^2 + 2(1 - \mu)r R \text{sen}\phi \cos\theta. \quad (4)$$

Temos então a seguinte lagrangiana,

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + r^2 \text{sen}^2\phi(\dot{\nu} + \dot{\theta})^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1 - \mu}{r_1} \quad (5)$$

A omissão da massa do corpo não altera as equações do movimento. O termo $\dot{\nu}$ aparece por causa da rotação do referencial de tal forma que os momentos conjugados são:

$$p_r = \dot{r} \quad (6)$$

$$p_\phi = r^2\dot{\phi} \quad (7)$$

$$p_\theta = r^2 \text{sen}^2\phi(\dot{\nu} + \dot{\theta}) \quad (8)$$

E portanto obtemos a hamiltoniana abaixo:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} + \frac{p_\theta^2}{r^2 \text{sen}^2\phi}\right) - \dot{\nu}p_\theta - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1 - \mu}{r_1} \quad (9)$$

Note que R e $\dot{\nu}$ dependem de t de forma complicada, dificultando a solução das equações de Hamilton. É possível, porém, encontrar equações relacionando as coordenadas e a anomalia verdadeira, abrindo mão de soluções em função do tempo. Para isso, empregaremos transformações canônicas conhecidas como transformações de Nechvile². Começamos com uma transformação para um referencial pulsante tal que $\hat{r} = \frac{r}{R}$. Considere a seguinte função geratriz,

$$W(q, \hat{p}, t) = \frac{r}{R}\hat{p}_r + \phi\hat{p}_\phi + \frac{\dot{R}}{2R}r^2, \quad (10)$$

onde \hat{q} e \hat{p} são as coordenadas transformadas. As equações obtidas são:

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad (11)$$

$$\hat{\phi} = \phi \quad (12)$$

$$\hat{\theta} = \theta \quad (13)$$

$$p_r = \frac{\hat{p}_r}{R} + \dot{R}\hat{r} \quad (14)$$

$$p_\phi = \hat{p}_\phi \quad (15)$$

$$p_\theta = \hat{p}_\theta \quad (16)$$

²apesar da transformação ser associada ao nome de Nechvile, devido a seus trabalhos 1917, o mesmo raciocínio fora empregado por Scheibner em 1866.

Pela independência linear das coordenadas, a nova hamiltoniana K passa a ser,

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t} . \quad (17)$$

A dependência de W em t está contida em R e \dot{R} . Pela regra da cadeia obtemos,

$$K(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{1}{2R^2}(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{p}_\phi^2}{\hat{r}^2} + \frac{\hat{p}_\theta^2}{\hat{r}^2 \text{sen}^2 \hat{\phi}}) - \frac{\sqrt{p}}{R^2} \hat{p}_\theta - \frac{1}{R}(\frac{\mu}{\hat{r}_2} + \frac{1-\mu}{\hat{r}_1}) + \frac{e \cos \nu}{2R} \hat{r}^2 , \quad (18)$$

onde $\hat{r}_i = \frac{r_i}{R}$. A segunda parte da transformação consiste em trocar t por ν . Considere uma transformação do tipo:

$$G(q, p, \nu) = \frac{1}{\dot{\nu}} K(q, p, t) \quad (19)$$

Pelas equações de Hamilton,

$$\frac{dq}{d\nu} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{d\nu} = \frac{\dot{q}}{\dot{\nu}} = \frac{1}{\dot{\nu}} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p} , \quad (20)$$

assumindo que $\dot{\nu}$ não depende de p , como é o caso que nos interessa. De forma análoga, obtemos todas as equações de Hamilton com ν no lugar de t . Aplicaremos essa transformação ao nosso problema, seguida de uma transformação de escala nos momentos, com um fator $\frac{1}{\sqrt{p}}$ (p é o semi-latus rectum), resultando em (eq. 2):

$$G(q', p', \nu) = \frac{R^2}{p} K(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{1}{2}(r'^2 + p_r'^2 + \frac{p_\phi'^2}{r'^2} + \frac{p_\theta'^2}{r'^2 \text{sen}^2 \phi'}) - p'_\theta - \frac{R}{p}(\frac{r'^2}{2} + \frac{\mu}{r'_2} + \frac{1-\mu}{r'_1}) \quad (21)$$

A dependência em ν está contida em R . No caso circular, em que R é constante, não há dependência explícita em ν , logo G é uma constante do movimento (usando a propriedade $\frac{dG}{d\nu} = \frac{\partial G}{\partial \nu}$; note que $\frac{dG}{d\nu} = 0$ implica $\frac{dG}{dt} = 0$). De fato, G é a metade da integral de Jacobi, a única quantidade conservada conhecida no problema restrito circular - energia e momento não são conservados.

Finalmente, podemos derivar as equações do movimento:

$$\frac{dr'}{d\nu} = p'_r \quad (22)$$

$$\frac{d\phi'}{d\nu} = \frac{p'_\phi}{r'^2} \quad (23)$$

$$\frac{d\theta'}{d\nu} = \frac{p'_\theta}{r'^2 \text{sen}^2 \phi'} - 1 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp'_r}{d\nu} &= \frac{p_\phi'^2}{r'^3} + \frac{p_\theta'^2}{r'^3 \text{sen}^2 \phi'} - (1 - \frac{R}{p})r' \\ &\quad - \frac{R}{p} [\frac{1-\mu}{r_1'^3} (r' - \mu \text{sen} \phi' \cos \theta' + \frac{\mu}{r_2'^3} (r' + (1-\mu) \text{sen} \phi' \cos \theta'))] \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{dp'_\phi}{d\nu} = \frac{p_\theta'^2 \cos \phi'}{r'^2 \text{sen}^3 \phi'} + \frac{R}{p} \mu (1-\mu) r' \cos \phi' \cos \theta' (\frac{1}{r_1'^3} - \frac{1}{r_2'^3}) \quad (26)$$

$$\frac{dp'_\theta}{d\nu} = -\frac{R}{p} \mu (1-\mu) r' \text{sen} \phi' \text{sen} \theta' (\frac{1}{r_1'^3} - \frac{1}{r_2'^3}) \quad (27)$$

3 Aplicação

Sob essa solução restrita para o sistema de 3 corpos é possível obter pontos de *estabilidade gravitacional*, onde corpos usufruem de uma região sem perturbações, garantindo a constância nas posições (no referencial pulsante). No caso de uma órbita elíptica de com 3 corpos como no problema de Lagrange, obtêm-se 5 pontos com essa característica.

Considerando o repouso associado, os pontos de Lagrange são obtidos simplesmente zerando o lado esquerdo das equações 22 a 27, implicando nos seguintes resultados:

$$\phi' = \frac{\pi}{2} \quad (28)$$

$$p'_r = p'_\phi = 0 \quad (29)$$

$$p'_\theta = r'^2 \quad (30)$$

$$0 = r'(1 - \frac{1-\mu}{r_1'^3} - \frac{\mu}{r_2'^3}) + \mu(1-\mu)\cos\theta'(\frac{1}{r_1'^3} - \frac{1}{r_2'^3}) \quad (31)$$

$$0 = \mu(1-\mu)r'\sin\theta'(\frac{1}{r_1'^3} - \frac{1}{r_2'^3}) \quad (32)$$

Como as equações não dependem da anomalia verdadeira, os pontos são fixos no referencial pulsante, portanto não são fixos, em geral, no referencial não pulsante. Com única exceção no problema restrito circular, onde $e = 0$. Nesse caso, R é fixo e ν é linear em t , de forma que as transformações de Nechvile não são necessárias. Verificamos então, que os três pontos colineares, L_1 , L_2 e L_3 , correspondem às soluções com $\theta' = 0$ ou $\theta' = \pi$.

$$0 = r' - r'(\frac{1-\mu}{r_1'^3} + \frac{\mu}{r_2'^3}) \pm \mu(1-\mu)(\frac{1}{r_1'^3} - \frac{1}{r_2'^3}) \quad (33)$$

$$r_1' = |r' \mp \mu| \quad (34)$$

$$r_2' = |r' \pm (1-\mu)| \quad (35)$$

A equação 33 equivale a uma equação de 5º grau, que não tem solução numa forma fechada. Pode-se mostrar que há exatamente três soluções admissíveis (Figura 2). Para o caso $\mu \ll 1$, obtêm-se as seguintes aproximações:

$$L_1 = \left(\left[1 - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \right], 0 \right)$$

$$L_2 = \left(\left[1 + \left(\frac{\mu}{3}\right)^{1/3} \right], 0 \right)$$

$$L_3 = \left(- \left[1 + \left(\frac{5}{12}\right)\mu \right], 0 \right)$$

Para encontrar os pontos equiláteros, L_4 e L_5 , note que as equações 31 e 32 são satisfeitas se $r_1' = r_2' = 1$ - ou seja, esses pontos formam dois triângulos equiláteros com os primários. Pelas eqs. 3, 4 e 30:

$$r' \cos \theta' = \mu - \frac{1}{2} \quad (36)$$

$$r' \sin \theta' = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} \quad (37)$$

$$p'_\theta = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad (38)$$

voltando para coordenadas cartesianas resultam nos pontos:

$$L_4 = \left(\left[\mu - \frac{1}{2} \right], \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$L_5 = \left(\left[\mu - \frac{1}{2} \right], -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Sistemas conhecidos de três corpos envolvem os primários Sol-Terra e Terra-Lua, onde os pontos de Lagrange são utilizados para a manutenção de satélites/telescópios.

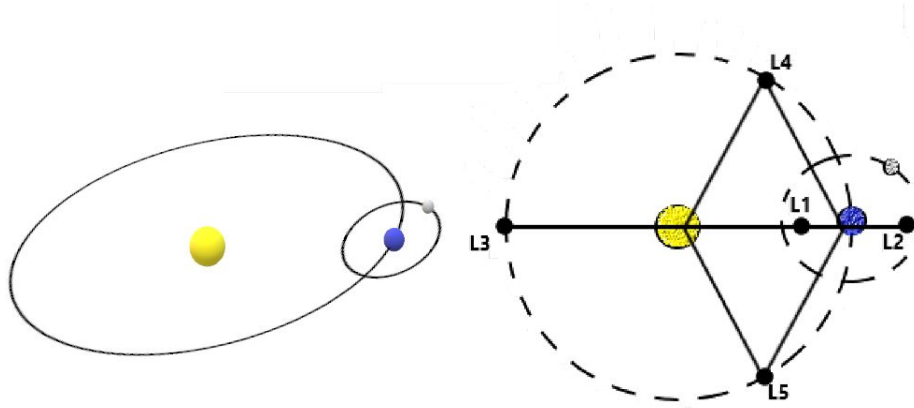


Figura 2: Imagem ilustrativa do pontos de Lagrange com o Sol e a Terra como primários. As distâncias não estão em escala.

O ponto L_1 é utilizado pelo telescópio SOHO [1], para observações solares, no ponto L_2 será instalado o telescópio James Webb [2] e os demais pontos estão sob estudo, já que Júpiter poderia ter influência relevante sobre estes resultando em um sistema de mais de 3 corpos.

4 Conclusão

Como foi verificado, as limitações do modelo são reais, porém dentro das propostas apresentadas, a determinação dos pontos de Lagrange foi concreta para o nosso caso de interesse, satisfazendo os objetivos imediatos do projeto e ainda que diante de restrições, ao pensarmos em termos de aplicabilidade podemos obter resultados relevantes, possibilitando a otimização da obtenção de dados a partir do estudo desses pontos convenientes.

Por mais que as construções sejam semelhantes, a dependência temporal da distância entre as primárias, que generaliza o caso para órbitas elípticas, desencadeia complicações do ponto de vista matemático, resultando na não conservação da Hamiltoniana e portanto o problema se torna não integrável. Entretanto, para alguns casos de interesse como o sistema Sol-Terra-Lua, a excentricidade assume valores muito pequenos³, o que permite a utilização de teorias de perturbações, linearizando as equações do movimento e portanto tornando-as integráveis.

Referências

- [1] <https://sohowww.nascom.nasa.gov/>.
- [2] <https://www.jwst.nasa.gov/>.
- [3] Brenton Duffy. Analytical methods and perturbation theory for the elliptic restricted three-body problem of astrodynamics. 01 2012.
- [4] Sir Isaac Newton. *Mathematical Principles of Natural Philosophy*.
- [5] Victory Szebehely. *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*. Academic Press, 2013.
- [6] Mauri Valtonen, Joanna Anosova, Konstantin Kholshevnikov, Aleksandr Mylläri, Victor Orlov, and Kiyotaka Tanikawa. *The Three-body Problem from Pythagoras to Hawking*. Springer International Publishing, 2016.

³No momento atual, a excentricidade da órbita terrestre é $e = 0.0167$.