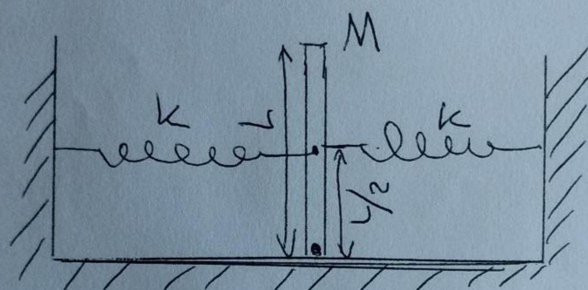
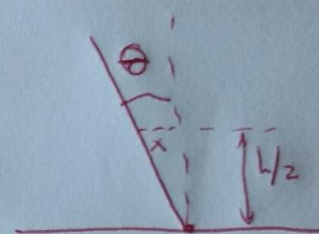
Física II: Prova II

- Não adianta apresentar contas sem uma discussão mínima sobre o problema. Respostas sem justificativas não serão consideradas.
- Defina claramente seu referencial cartesiano.
- Use caneta para as respostas finais das questões. Conteúdo a lápis não será considerado na hora da revisão.
- Não é permitido o uso de celulares.
- Não é solicitada a solução de nenhuma EDO!

1) Uma barra de massa M e comprimento L está presa em um eixo em uma superfície horizontal. Em cada um dos lados, há uma mola de constante K que estão presas no meio da barra. Pede-se:
   a) Obtenha a energia mecânica do sistema. (**0.8 pontos**)
   b) Para qual condição o sistema apresenta um equilíbrio estável? Justifique. Qual a frequência de ressonância? (**1.2 pontos**)
   c) Obtenha a equação de movimento e a frequência natural de oscilação utilizando torque. (**1.0 pontos**)

O momento de inércia de uma barra é em relação à sua extremidade é $ML^2/3$





a) $$E_M = \frac{1}{2} I\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{2}{2}kx^2$$ 0.4 pontos

p/ pequenos angulos $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$x = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta \simeq \frac{L}{2}\theta$$

$$E_M = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{L}{2} + \left(\frac{kL^2}{4} - \frac{MLg}{4}\right)\theta^2$$ 0.4 pontos

b) Para um equilibrio estável $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0$

$$U = Mg\frac{L}{2} + \left(\frac{kL^2}{4} - \frac{MLg}{4}\right)\theta^2$$ 0.4 pontos

ou seja $\frac{d^2U}{d\theta^2} \simeq (kL^2 - MLg) > 0$

0.4 pontos $kL > mg$ força da mola maior que o peso

P/ obter ω_0 vamos reescrever a energia mecânica usando

$$\omega = \frac{V}{\lambda} \quad e \quad \theta = \frac{2x}{L} \quad e \quad \lambda = \frac{L}{2}$$

$$E_M = \frac{1}{2}\frac{4I}{L^2}V^2 + Mg\frac{L}{2} + \left(\frac{kL^2}{4} - \frac{MLg}{4}\right)\frac{4}{L^2}\cancel{x}^2$$

0.2 pontos

Comparando com a energia mecânica de um OH

$$E_M = \frac{1}{2}m'V^2 + \frac{1}{2}k'x^2 \quad \left(\text{ignorando o termo constante}\right)$$

$$m' = \frac{4I}{L^2} \quad e \quad k' = 2\left(k - \frac{Mg}{L}\right)$$

então $$\omega_0^2 = \frac{k'}{m'} = \frac{2\left(k - \frac{Mg}{L}\right)}{\frac{4 \frac{ML^2}{3}}{L^2}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{M} - \frac{g}{L}\right)$$

0.2 pontos

c) Por torque temos

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2k\frac{L}{2}\frac{L}{2}\theta + Mg\frac{L}{2}\theta$$

0.5 pontos

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2I}\left[kL^2 - MgL\right]$$

0.5 pontos

$$= \frac{3}{2ML^2}\left[kL^2 - MgL\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{k}{M} - \frac{g}{L}\right]$$

Questão 2

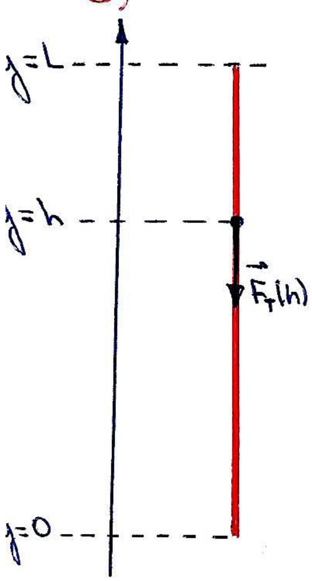
a) Como a tensão na corda é cte e seu peso deve ser desprezado: $v_p = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{F_T L}{m}}$ 0.25 pontos

O tempo de propagação do pulso na corda fica: $t_p = \frac{L}{v_p} \Rightarrow t_p = \sqrt{\frac{mL}{F_T}}$ 0.25 pontos

O tempo de queda livre do detrito é: $t_q = \sqrt{\frac{2L}{g}}$ 0.25 pontos

Assim para o plano ter chance de funcionar $t_q > t_p \Rightarrow \sqrt{\frac{2L}{g}} > \sqrt{\frac{mL}{F_T}} \Rightarrow \boxed{F_T > \frac{mg}{2}}$ // 0.25 pontos

b)



A tensão na corda a uma altura h é igual ao peso do segmento de corda abaixo deste ponto. Logo

$$F_T(h) = \int_0^h dm\, g \Rightarrow F_T(h) = \int_0^h \mu g\, dy$$ 0.3 pontos

$$F_T(h) = \mu g h \Rightarrow F_T = \frac{mgh}{L}$$ 0.4 pontos

A vel. de prop. do pulso na altura h é $v_p = \sqrt{\frac{F_T(h)}{\mu}} \Rightarrow \boxed{v_p = \sqrt{gh}}$ // 0.3 pontos c)

Temos que $v_p = \frac{dh}{dt} = \sqrt{gh}$

logo: $\frac{dh}{\sqrt{gh}} = dt \Rightarrow \int_0^L \frac{dh}{\sqrt{gh}} = \int_0^{t_p} dt$. 0.3 pontos

$\frac{2\sqrt{gh}}{g}\Big|_0^L = t\Big|_0^{t_p} \Rightarrow t_p = 2\sqrt{\frac{L}{g}}$. 0.3 pontos

Portanto: $t_p > t_q$, o que mostra que o plano não funcionará. Para que funcione será preciso que o aventureiro 1 tracione a corda como discutido no item a). 0.4 pontos

Questão I

a) A força da mola será dada por

$$F = -k(y - y')$$

$$F = -ky + ky_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad \text{onde } x = vt$$

0.2 pontos

Logo o carro é um OHA forçado com frequência $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ e $\omega = \frac{2\pi v}{L}$ 0.3 pontos

Em $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ a diferença de fase é $\pi/2$, do gráfico temos que $\pi/2 \Rightarrow v \simeq 1.6\ m/s$ 0.5 pontos

Esta é uma questão que envolve a leitura de um gráfico, pequenos desacordos númericos serão aceitos

$$\frac{k}{M} = \left(\frac{2\pi v}{L}\right)^2 \Rightarrow k \simeq 2\,10^5\ N/m$$ 0.5 pontos

b) Fazendo $F_0 = ky_0$ $\omega = \frac{2\pi v}{L}$ temos que a amplitute é (p/ $v \to 0$)

$$Y \simeq \frac{ky_0}{M\sqrt{\omega_0^4}} \cong \frac{ky_0}{M\frac{k}{M}} \simeq y_0$$ 0.5 pontos

ou seja passando bem devagar o carro só sobe o equivalente a altura do quebra-mola 0.5 pontos

c) O intervalo de ressonancia do sistema é

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{b}{2M}$$ 0.3 pontos

p/ obter b usamos o seguinte ponto do gráfico

$v = 1.55\ m/s$ e $\varphi \simeq 0.7$

$$\tan\varphi = \frac{b\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$\omega_0^2 \simeq 100$

$\omega \simeq 9.73 \Rightarrow \omega^2 \simeq 94.8$

$$b \simeq \frac{m \tan\varphi\,(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \simeq 900\ \frac{kg}{s}$$ 0.3 pontos

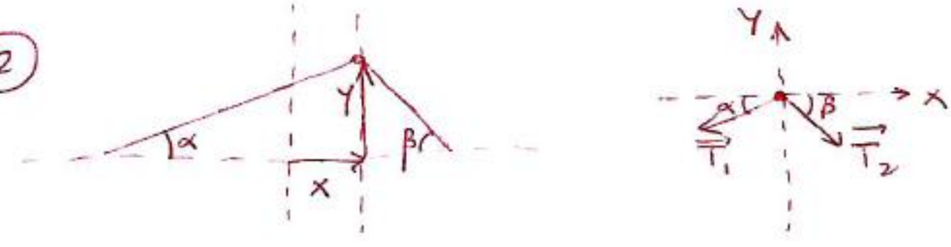
O intervalo não seguro é

$$\omega_0 - \frac{b}{2m} < \omega < \omega_0 + \frac{b}{2m}$$

$$9.77 < \omega < 10.22$$

$$1.55\ m/s < \omega < 1.62\ m/s$$ 0.4 pontos

(2)



$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$

NA DIREÇÃO X: $F^{(x)}_{RES} \Rightarrow -T\cos\alpha + T\cos\beta = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -T(\cos\alpha - \cos\beta) \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2T\left(\dfrac{x}{L_0}\right)\left(\dfrac{y^2}{L_0^2}\right)$

NA DIREÇÃO Y: $F^{(y)}_{RES} \Rightarrow -T\sin\alpha - T\sin\beta = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -T(\sin\alpha + \sin\beta) \Rightarrow m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\dfrac{T}{L_0}y$

PORTANTO:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{T}{L_0}\dfrac{y^2}{L_0^2}x & \text{(MOVIMENTO EM X NÃO É HARMÔNICO)} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\dfrac{T}{L_0}y & \text{(MOVIMENTO EM Y É HARMÔNICO SIMPLES)} \end{cases}$$

PERÍODO EM Y: $T = \dfrac{2\pi}{\omega_y} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2T}{mL_0}}} = \pi\sqrt{\dfrac{2mL_0}{T}}$

(3) FORÇA DISSIPATIVA $\vec{F}_d = -b\dfrac{dy}{dt}\hat{j}$

$\Rightarrow m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{2T}{L_0}y - b\dfrac{dy}{dt}$ (EQ. DE MOVIMENTO DO OSCILADOR HARMÔNICO LINEARMENTE AMORTECIDO)

OSCILAÇÕES EM Y OCORRERÃO NO REGIME DE SUBAMORTECIMENTO

$$\Rightarrow \frac{b}{2m} < \frac{2T}{mL_0}$$

(c) Força Dissipativa $\vec{F}_d = -b\frac{dx}{dt}\hat{i}$

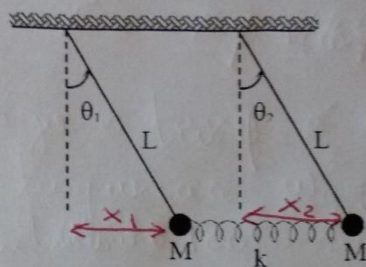
$$
\begin{cases}
m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{2T}{L_0}\dfrac{y^2}{L_0^2}x - b\dfrac{dx}{dt} & \text{(movimento amortecido)} \\[2ex]
m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{2T}{L_0}y & \text{(M.H.S)}
\end{cases}
$$

Note que o movimento em y é o de um oscilador harmônico simples. A dissipação que ocorre no movimento em x não afeta o movimento em y (diz-se que a variável y é desacoplada de x). Note que o potencial na direção x tem mínimo na posição x=0 (posição de equilíbrio). Por conta da dissipação a posição da bolinha tenderá à esta posição em x, enquanto executa um movimento harmônico simples em y. Assim, quando $t \gg 1$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
x(t \gg 1) \longrightarrow 0 \\
y(t \gg 1) = A\cos(\omega_y t + \delta)
\end{cases}
$$

Extra! Este exercício é FACULTATIVO! Este exercício será considerado na nota da sub. Mas você precisa acertar no mínimo 50% da questão!

4) Suponha dois pêndulos acoplados por uma mola.



a) Mostre que as equações de movimento são dadas por (**1.5 pontos**).:

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_1+\frac{K}{M}(\theta_1-\theta_2)=0 \; e \; \frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_2+\frac{K}{M}(\theta_2-\theta_1)=0$$

b) Suponha que as soluções sejam dadas por:
$\theta_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$ e $\theta_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$
Obtenha as frequências de ressonâncias do sistema. E discuta como o sistema oscila com cada frequência (**2.0 pontos**).

a) As equações dos pendulos sem a mola são

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_1=0 \quad \text{(como mostrado em sala)}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_2=0$$

0.5 pontos

Com a mola temos uma força extra que é

$$F = k(x_2-x_1)$$

P/ pequenos angulos $x_2 = L\theta_2$ e $x_1 = L\theta_1$

$$F = kL(\theta_2-\theta_1)$$

0.2 pontos

reescrevendo as eq. com a mola agora

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_1=\frac{+F}{ML}$$

0.3 pontos

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}+\frac{g}{L}\theta_2=-\frac{F}{ML}$$

Assim

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2} + \frac{g}{L}\theta_1 + \frac{k}{M}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

0.5 pontos

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2} + \frac{g}{L}\theta_2 + \frac{k}{M}(\theta_2 - \theta_1) = 0$$

b) Sabemos que $\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos\omega t$ e $\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2} = -\omega^2 B\cos\omega t$

- O termo $\cos\omega t$ está presente em todo, assim podemos removê-lo e obtemos

$$-\omega^2 A + \frac{g}{L}A + \frac{k}{M}A = \frac{k}{M}B$$

1 ponto

$$-\omega^2 \cancel{B} + \frac{g}{L}B + \frac{\cancel{K}}{M}B = \frac{k}{M}A$$

ou seja

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)A = \frac{k}{M}B$$

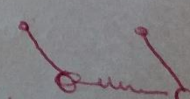
$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)B = \frac{k}{M}A$$

ou

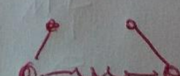
$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)B = \frac{k^2 B}{M^2\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{g}{L} + \frac{k}{M}\right)^2 = \frac{k^2}{M^2}$$

0.5 pontos

Se $\omega^2 = \frac{g}{L}$ a eq. acima é satisfeita  e os pendulos oscilam sem distender a mola

0.5 pontos $A = B$

Se $\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{2k}{M}$ teremos  e $A = -B$

... acima pode ser resolvida com $\omega^2 = X$ ...