PSI-5759 Codificação de Voz
Prova

Prof. Miguel Arjona Ramírez

28 de novembro de 2017

Nome: Gabarito ....

Nº USP: ....

Duração da prova: 180 minutos
Tipo de prova: com consulta ao material próprio

Notas:

1ª **Q:** ....

2ª **Q:** ....

Total: ....

1. (4,2) Um sinal aleatório $s \sim U[-5, 5]$ é passado por um quantizador uniforme Q de 10 bit/amostra com degrau central e excursão definida entre -4 e 4.

a) (0,3) Determine a altura Δ do degrau de Q para que a excursão coincida com os limites da região granular.

b) (0,5) Indique em função de Δ os níveis de decisão e os níveis de reconstrução de Q definido no item a).

c) (0,4) Determine a região de saturação.

a) O número de níveis de Q é

$$M = 2^B \longrightarrow M = 1024$$

A altura do degrau de Q é

$$\Delta = \frac{2 S_{max}}{M} = \frac{2 \times 4}{1024} \longrightarrow \Delta = 2^{-7} = 0{,}0078$$

b) Os níveis de decisão são

$$\{-\infty, -512\Delta, -511\Delta, \ldots, -2\Delta, -\Delta, 0, \Delta, 2\Delta, \ldots, 511\Delta, 512\Delta, \infty\}$$

e os níveis de reconstrução são

$$\{-511{,}5\Delta; -510{,}5\Delta; \ldots; -1{,}5\Delta; 1{,}5\Delta; \ldots; 510{,}5\Delta; 511{,}5\Delta\}$$

c) A região de saturação de Q é

$$R_s = \{s \leq -4\} \cup \{s > 4\}$$

d

d) (0,6) Calcule a probabilidade de saturação.

e) (1,2) Calcule as variâncias σ_s^2 e σ_q^2, sendo $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{s} - Q(\boldsymbol{s})$.

f) (1,2) Calcule a $\mathrm{SNR_{dB}}\,(\boldsymbol{s}, Q(\boldsymbol{s}))$ e comente sobre o aproveitamento da resolução de 10 bit/amostra de Q.

d) A probabilidade de saturação de Q com o sinal s é

$$P_S = P\{s \in R_S\}$$

$$= \frac{1}{5-(-5)}\left[(5-4) + (-4-(-5))\right] = \frac{2}{10}$$

$$P_S = \frac{1}{5}$$

e) Como $Es = 0$, $\sigma_s^2 = Es^2$

$$= \int_{-5}^{5} s^2 \frac{1}{10} ds = \frac{1}{10}\frac{s^3}{3}\Big|_{-5}^{5}$$

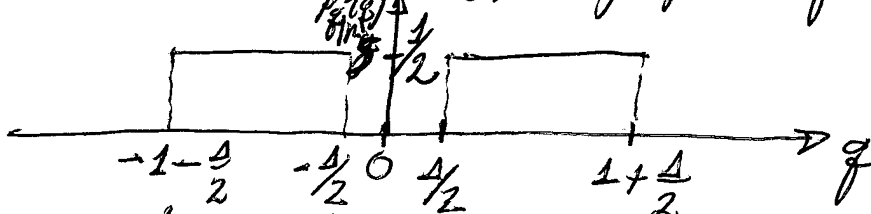
$$= \frac{1}{30}\left(125-(-125)\right) \rightarrow \sigma_s^2 = \frac{25}{3}$$

O sinal de erro de quantização torna-se $q = s - \tilde{s}$

$q = s - \tilde{s}_i$ quando $s \in V_i = (s_{i-1}, s_i]$ e, com a hipótese da quantização de alta resolução e intervalos de mesmo comprimento Δ, sua fdp na região granular, R_g, é

$$p_{q|R_g}(q) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{se } -\Delta < q \le \Delta \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Na região de saturação, R_S, a fdp de q é



Temos que $\{R_g, R_S\}$ formam uma partição da reta real $\mathbb{R}$, pois

$$\begin{cases} R_g \cap R_S = \emptyset \\ R_g \cup R_S = \mathbb{R} \end{cases}$$

de forma que R_g e R_s são dois eventos mutuamente exclusivos, valendo que

$$P\{s \in R_g\} + P\{s \in R_s\} = P\{s \in R\}$$

ou

$$P\{s \in R_g\} + \frac{1}{5} = 1,$$

obtendo-se que a probabilidade da região granular é

$$P\{s \in R\} = \frac{4}{5}.$$

Como

$$E_q = P\{s \in R_g\} \sum_{i=2}^{1023} P\{s \in V_i | R_g\} E[q | V_i, R_g] + P\{s \in R_s\} E[q | R_s]$$

$$= \frac{4}{5} \times 0 + \frac{1}{5} \times 0 = 0,$$

temos a variância do erro de quantização

$$\sigma_q^2 = E[q^2]$$

$$= P\{s \in R_g\} \sum_{i=2}^{1023} \frac{1}{1022} \frac{\Delta^2}{12} + P\{s \in R_s\} . E[q^2 | R_s]$$

sendo

$$E[q^2 | R_s] = \int_{-1-\Delta/2}^{-\Delta/2} q^2 \frac{1}{2} dq + \int_{\Delta/2}^{1+\Delta/2} q^2 \frac{1}{2} dq$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{q^3}{3} \Big|_{-1-\Delta/2}^{-\Delta/2} + \frac{1}{2} \frac{q^3}{3} \Big|_{\Delta/2}^{1+\Delta/2}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \left[\left(1 + \frac{\Delta}{2}\right)^3 - \left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{3}{2}\Delta \right] \longrightarrow E[q^2 | R_s] = 0{,}3373$$

Assim, a variância do erro de quantização é

$$\sigma_q^2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{\Delta^2}{12} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \left[1 + \frac{3}{4}\Delta^2 + \frac{3}{2}\Delta \right]$$

ou

$$\sigma_q^2 = 0{,}0675$$

f) $SNR_{dB}(s,\tilde{s}) = 10\log_{10}\dfrac{\sigma_s^2}{\sigma_q^2}$

$$= 10\log_{10}\frac{25/3}{0,0675}$$

ou

$$SNR_{dB}(s,\tilde{s}) = 20,9180\,dB$$

Com resolução $B = 10$ bit/amostra e sinal com densidade uniforme era de se esperar

$$\widehat{SNR}_{dB}(s,\tilde{s}) = 60\ dB,$$

mas amplitude do sinal está desajustada com a excursão do quantizador, causando a perda de quase 40 dB ou quase 7 bit/amostra em resolução média.

2. (5,8) Seja o sinal aleatório com função de autocorrelação normalizada que tem alguns valores dados na tabela abaixo.

	m			
	0	1	2	3
$\rho_{ss}(m)$	1	0,8	0,5	0,1

a) (1,0) Determine o coeficiente de predição, o coeficiente de correlação parcial e o erro quadrático residual da análise preditiva linear de primeira ordem do sinal.

b) (1,2) Determine os coeficientes de predição, o coeficiente de correlação parcial e o erro quadrático residual da análise preditiva linear de segunda ordem do sinal.

a) $A_0(z) = 1, \; B_0(z) = z^{-1}, \; \varepsilon_0 = R(0)$

$$k_1 = -\frac{\langle A_0(z), z^{-1}\rangle}{\varepsilon_0} = -\frac{R(1)}{\varepsilon_0}$$

$$= -\rho_{ss}(1) \longrightarrow k_1 = -0{,}8$$

$$A_1(z) = 1 + k_1 z^{-1} = 1 + a_{11} z^{-1} \Big\} \rightarrow a_{11} = -0{,}8 \rightarrow B_1(z) = z^{-2} - 0{,}8 z^{-1}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (1 - k_1^2) = R(0).(1 - 0{,}64) \longrightarrow \varepsilon_1 = 0{,}36\, R(0)$$

b) $$k_2 = -\frac{\langle A_1(z), z^{-2}\rangle}{\varepsilon_1} = -\frac{R(2) - 0{,}8\, R(1)}{0{,}36\, R(0)} = -\frac{0{,}5 - 0{,}8 . 0{,}8}{0{,}36} \rightarrow k_2 = +0{,}3889$$

$$A_2(z) = A_1(z) + k_2 B_1(z)$$

$$= 1 - 0{,}8 z^{-1} + 0{,}3889 z^{-2} - 0{,}3889 \times 0{,}8 z^{-1}$$

$$A_2(z) = 1 + \underbrace{1{,}1111}_{a_{12}} z^{-1} + \underbrace{0{,}3889}_{a_{22}} z^{-2}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_0 (1 - k_2^2) \longrightarrow \varepsilon_2 = 0{,}3056\, R(0)$$

c) (0,5) Calcule o ganho de predição de 1ª ordem do sinal $s(n)$.

d) (0,5) Calcule o ganho de predição de 2ª ordem do sinal $s(n)$.

e) (1,2) Determine o ganho de transformação sobre PCM da transformada de Karhunen-Loève (KLT) com blocos de comprimento 2.

c) $G_p^{(1)} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} = \frac{R(0)}{0{,}36\,R(0)} \rightarrow G_p^{(1)} = 2{,}7778$

d) $G_p^{(2)} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_2} = \frac{R(0)}{0{,}3056\,R(0)} \rightarrow G_p^{(2)} = 3{,}2727$

e) $G_{KLT}^{(2)} = \sqrt{G_p^{(1)}} = \sqrt{2{,}7778} \rightarrow G_{KLT}^{(2)} = 1{,}6667$

f) (1,4) Determine a matriz da KLT de comprimento 2 e a matriz de autocorrelação de seus coeficientes. Verificou-se o ganho calculado no item e)?

Observação: A KLT é uma transformada ortogonal.

$$R_{SS}^{(2)} \cdot v = \lambda v$$

$$(R_{SS}^{(2)} - \lambda I) v = 0_{2\times 2}$$

Para solução não-trivial,

$$\det(R_{SS}^{(2)} - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} R(0)-\lambda & R(1) \\ R(1) & R(0)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2R(0)\lambda + R^2(0) - R^2(1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = R(0) + R(1) \\ \lambda_2 = R(0) - R(1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1{,}8R(0) \\ \lambda_2 = 0{,}2R(0) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{00} \\ v_{01} \end{bmatrix} = 1{,}8R(0) \begin{bmatrix} v_{00} \\ v_{01} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow v_{01} = v_{00}$$

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) \\ R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{11} \end{bmatrix} = 0{,}2R(0) \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{11} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow v_{11} = -v_{10}$$

$$A^T = [v_0 \ v_1] \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ou } A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

com vetores-base de norma unitária

$$G_{KLT} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)/2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \rightarrow G_{KLT} = 1{,}6667$$