0.1. **Passeios Aleatórios - Introdução.** Considere um jogo com uma sequência de partidas em que na n- ésima partida o jogador recebe a importância X_n, (uma variável aleatória que pode assumir valores negativos) da Banca. Se o jogador tem capital inicial x, o seu capital depois de n partidas é

$$S_n = x + X_1 + ... + X_n, \quad S_0 = x.$$

Admitiremos que $(X_n)_{n\geq 1}$ são independentes e identicamente distribuidas.

Definição 0.1. Ao processo estocástico $(S_n)_{n\geq 0}$ denominamos passeio aleatório.

Se X_k tem média finita μ temos que o capital esperado na conclusão da n- ésima partida é

$$E[S_n] = x + n\mu.$$

Suponha que o jogador escolha os números $a \leq x$ e $b \geq x$ de forma que abandonará o jogo quando seu capital se tornar não maior do que a ou não menor do que b. Seja

$$T = \min\{n \geq 0 : S_n \leq a \;\; ou \;\; S_n \geq b\}$$

o número de partidas que o jogador participa. Assumimos que $P(X_k = 0) < 1$.

Proposição 0.2. *Se o jogador abandona o jogo após a T- ésima partida, seu capital será S_T e então*

$$E[S_T] = x + \mu.E[T].$$

Prova:

$$E[S_T] = E[x + \Sigma_{j=1}^{T} X_j] = x + E[\Sigma_{j=1}^{\infty} X_j 1_{\{T\geq j\}}] =$$
$$x + E[\Sigma_{j=1}^{\infty} X_j (1 - 1_{\{T<j\}})] = x + \Sigma_{j=1}^{\infty} E[X_j (1 - 1_{\{T<j\}})].$$

Como $\{T < j\}$ depende apenas de $\{X_1, ..., X_{j-1}\}$, é independente de X_j e

$$E[S_T] = x + \Sigma_{j=1}^{\infty} E[X_j] E[(1 - 1_{\{T<j\}})] = x + \mu \Sigma_{j=1}^{\infty} E[1_{\{T\geq j\}}] =$$
$$x + \mu \Sigma_{j=1}^{\infty} P(T \geq j) = x + \mu E[T].$$

Proposição 0.3. *Se X_k tem média $\mu = 0$ e variância finita σ^2, então*

$$Var(S_T) = \sigma^2 E[T].$$

Prova:

Se $\mu = 0$, $E[S_T] = x$ e $Var(S_T) = E[(S_T - x)^2]$.

Contudo $S_T - x = \Sigma_{j=1}^{\infty} X_j (1 - 1_{\{T<j\}})$ e

$$(S_T - x)^2 = \Sigma_{j=1}^{\infty} X_j (1 - 1_{\{T<j\}}).\Sigma_{k=1}^{\infty} X_k (1 - 1_{\{T<k\}}) =$$

$$\Sigma_{j=1}^{\infty}\Sigma_{k=1}^{\infty}X_j(1-1_{\{T<j\}}).X_k(1-1_{\{T<k\}})$$

e

$$E[(S_T-x)^2]=\Sigma_{j=1}^{\infty}\Sigma_{k=1}^{\infty}E[X_j(1-1_{\{T<j\}}).X_k(1-1_{\{T<k\}})].$$

Se $j<k$, $X_j(1-1_{\{T<j\}}).X_k(1-1_{\{T<k\}})$ *depende somente de* $\{X_1,...,X_{k-1}\}$, *é independente de* X_k *e neste caso*

$$E[X_j(1-1_{\{T<j\}}).X_k(1-1_{\{T<k\}})]=E[X_j(1-1_{\{T<j\}}).(1-1_{\{T<k\}})]E[X_k]=0.$$

De maneira semelhante podemos mostrar que

$$E[X_j(1-1_{\{T<j\}}).X_k(1-1_{\{T<k\}})]=0$$

para $k<j$.

Portanto

$$E[(S_T-x)^2]=\Sigma_{j=1}^{\infty}E[X_j^2(1-1_{\{T<j\}})^2]=\Sigma_{j=1}^{\infty}E[X_j^2(1-1_{\{T<j\}})]=$$
$$\Sigma_{j=1}^{\infty}E[X_j^2]E[(1-1_{\{T<j\}})]=\Sigma_{j=1}^{\infty}E[X_j^2]E[1_{\{T\geq j\}}]=$$
$$\Sigma_{j=1}^{\infty}E[X_j^2]P(T\geq j)=\Sigma_{j=1}^{\infty}\sigma^2P(T\geq j)=\sigma^2E[T].$$

Caminhos Aleatórios Simples

Definição 0.4. No caso em que $P(X_k=1)=p$, $P(X_k=-1)=q$ e $P(X_k=0)=r$, com $p+q+r=1$, $(S_n)_{n\geq 1}$ denomina-se caminho aleatório simples.

No caminho aleatório simples

$$P(\{S_T=a\}\cup(\{S_T=b\})=P(S_T=a)+P(S_T=b)=1$$

$$E[S_T]=aP(S_T=a)+bP(S_T=b)=a(1-P(S_T=b))+bP(S_T=b)=$$
$$(b-a)P(S_T=b)+a.$$

No caso em que $p=q$ temos $\mu=E[X_k]=-q+p=0$ e $E[S_T]=x$. Portanto

$$x=(b-a)P(S_T=b)+a \;\; e \;\; P(S_T=b)=\frac{x-a}{b-a} \;\; e \;\; P(S_T=a)=\frac{b-x}{b-a}.$$

Temos $\sigma^2=p+q=1-r$ e $Var(S_T)=\sigma^2E[T]=(1-r)E[T]$.

Por outro lado

$$Var(S_T)=E[S_T^2)-(E[S_T])^2=b^2P(S_T=b)+a^2P(S_T=a)-x^2=$$

$$b^2\frac{x-a}{b-a}+a^2\frac{b-x}{b-a}-x^2=\frac{b^2x-b^2a+a^2b-a^2x}{b-a}-x^2=\frac{x(b^2-a^2)-ba(b-a)}{b-a}-x^2=$$
$$\frac{x(b-a)(b+a)-ba(b-a)}{b-a}-x^2=x(b+a)-ba-x^2=(x-a)(b-x).$$

Concluimos que

$$E[T] = \frac{(x-a)(b-x)}{(1-r)}.$$

se $p = q = 0,5$, $r = 0$ e $E[T] = (x-a)(b-x)$.

Exemplo 0.5. Dois jogadores, A e B, concordam em fazer uma série de partidas até a ruína de um deles. Suponha que os resultados das partidas sejam independentes e identicamente distribuidos e que ambos tenham probabilidade $\frac{1}{2}$ de ganhar qualquer partida. O Jogador A tem capital inicial de $R\$5,00$ e o jogador B tem capital inicial de $R\$10,00$. Determine a probabilidade de que ocorra a ruína de B. Determine o número esperado de partidas.

Considere que S_n represente o capital do jogador A depois de n partidas. Aqui $p = q = \frac{1}{2}$, $x = 5$, $a = 0$ e $b = 15$. A resposta da primeira pergunta é:

$$P(S_T = 15) = \frac{5-0}{15-0} = \frac{1}{3}.$$

A resposta da segunda questão é:

$$E[T] = (5-0)(15-5) = 50.$$

Para $p \neq q$, $p > o$ e $q > 0$, usaremos uma outra abordagem para obter os resultados.

Para x, um número inteiro, no intervalo $[a,b], a < b$ defina $f(x) = P(S_T = b|S_0 = x]$.

Assim

$$P(S_T = b) = P(X_1 = 1)P(S_T = b|X_1 = 1) + P(X_1 = -1)P(S_T = b|X_1 = -1) +$$
$$P(X_1 = 0)P(S_T = b|X_1 = 0) = pP(S_T = b|X_1 = 1) + qP(S_T = b|X_1 = -1) +$$
$$rP(S_T = b|X_1 = 0).$$

Fazendo $P(S_T = b|X_1 = i) = f(x+i), \quad i = 1, -1, 0$ temos

$$f(x) = pf(x+1) + qf(x-1) + rf(x),$$

sob as condições

$$f(a) = P(S_T = a|X_0 = b) = 0, \quad f(b) = P(S_T = b|X_0 = b) = 1.$$

Como $p + q = 1 - r$ temos

$$f(x) = pf(x+1) + qf(x-1) + (1-p-q)f(x)) = p(f(x+1) - f(x)) - q(f(x) - f(x-1) + f(x).$$

Portanto
$$f(x+1)-f(x)=\frac{p}{q}(f(x)-f(x-1)),\quad a<x<b.$$

Definindo $c=f(a+1)=f(a+1)-f(a)$
$$f(x+1)-f(x)=\frac{p}{q}(f(x)-f(x-1))=(\frac{p}{q})^2(f(x-1)-f(x-2))=...=c(\frac{p}{q})^{x-a}$$
temos que
$$f(x)=f(x)-f(a)=\sum_{y=a}^{x-1}(f(y+1)-f(y))=\sum_{y=a}^{x-1}c(\frac{p}{q})^{y-a}=c(\frac{1-(\frac{q}{p})^{x-a}}{1-(\frac{q}{p})}),\ a\leq x\leq b.$$

Como $f(b)=1$ temos $1=c(\frac{1-(\frac{q}{p})^{b-a}}{1-(\frac{q}{p})})$ e $c=\frac{1-(\frac{q}{p})}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}}$.

Concluimos que
$$f(x)=P(S_T=b|S_0=x)=\frac{1-(\frac{q}{p})^{x-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}},\quad a\leq x\leq b$$
e
$$P(S_T=a|S_0=x)=1-P(S_T=b|S_0=x)=\frac{(\frac{q}{p})^{x-a}-(\frac{q}{p})^{b-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}},\quad a\leq x\leq b.$$

Por outro lado temos
$$E[S_T|S_0=x]=(b-a)P(S_T=b)+a=(b-a)\frac{1-(\frac{q}{p})^{x-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}}+a.$$

Como $E[S_T]=x+\mu E[T]$ e $\mu=p-q$ concluímos
$$E[T]=\frac{E[S_T]-x}{\mu}=\frac{b-a}{p-q}\frac{1-(\frac{q}{p})^{x-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}}-\frac{x-a}{p-q},\quad a\leq x\leq b$$

Exemplo 0.6. Consideremos o exemplo anterior supondo que o jogador B tem probabilidade de $0,6$ de vencer cada partida. Determine a probabilidade de que ocorra a ruína de B, o ganho esperado deste jogador e o número esperado de partidas. Neste caso temos $p=0,4$ e

$q=0,6$. A probabilidade de que ocorra a ruína de B é
$$P(S_T=15)=\frac{1-(\frac{0,6}{0,4})^5}{1-(\frac{0,6}{0,4})^{15}}=0,0151.$$
O capital esperado do jogador A é
$$E[S_T]=15P(S_T=15)=150,0151=0,23.$$

Assim o ganho esperado de B (ou a perda esperada de A) é $5,00 - 0,23 = 4,77$. O número esperado de partidas é

$$E[T] = \frac{E[S_T] - x}{\mu} = \frac{-4,77}{-0,2} = 23,85 \approx 24.$$

Observação 0.7. Pode-se mostrar que, se $q < p$, quando $b \to \infty$,

$$P(S_T = b|S_0 = x) \to P(S_n > a, \forall n \geq 0) = 1 - (\frac{q}{p})^{x-a}.$$

Se $q \geq p$ este limite é 0.

Exemplo 0.8. Um cassino tem capital inicial de $R\$100.000,00$. Um jogador infinitamente rico tenta quebrar o cassino. Uma vez aceito seu desafio decide apostar $R\$1.000,00$ de cada vez. Se o jogador tem probabilidade $0,49$ de ganhar cada partida, qual é a probabilidade de que ele consiga quebrar a casa?

Seja S_n o capital do cassino (em múltiplos de $R\$1.000,00$)após n jogos. Considerando $p = 0,51$, $q = 0,49$, $x = 100$ e $a = 0$ e a probabilidade que ocorra a ruína do cassino é

$$1 - P(S_n > a, \forall n \geq 0) = (\frac{q}{p})^{x-a} = (\frac{0,49}{0,51})^{100} = 0,018.$$

Seja A um subconjunto dos inteiros. Para $x \notin A$ e $y \notin A$, seja $P_A(x,y)$ a probabilidade de um caminho aleatório simples partindo de x alcance y em algum tempo positivo antes de alcançar A. Para $x \in A$ ou $y \in A$, seja $P_A(x,y) = 0$. Estas probabilidades podem ser determinadas em termos da seção.

Observação 0.9. Suponha que $p = q$. Consideremos o problema de determinar $P_{\{a,b\}}(y,y)$ onde $a < y < b$. Estando em y, depois de um passo, o caminho aleatório está em $y-1, y$ ou $y+1$ com probabilidades $p, 1-2p$ e p, respectivamente. De $y-1$, a probabilidade de retornar a y antes de alcançar a é $\frac{(y-a-1)}{(y-a)}$. De $y+1$, a probabilidade de retornar a y antes de alcançar b é $\frac{(b-y-1)}{(b-y)}$.

Portanto a probabilidade de retornar a y antes de alcançar a ou b é

$$P_{\{a,b\}}(y,y) = p\frac{(y-a-1)}{(y-a)} + 1 - 2p + p\frac{(b-y-1)}{(b-y)} =$$

$$\frac{p(y-a-1)(b-y) + (y-a)(b-y)(1-2p) + p(b-y-1)(y-a)}{(y-a)(b-y)} =$$

$$1 - \frac{p(b-a)}{(y-a)(b-y)}.$$

Para $x \notin A$ e $y \notin A$, defina $E_A(x,y)$ o número esperado de visitas a y, antes de alcançar A, para um caminho aleatório comeando em x. Seja $E_A(x,y)=0$ para $x \in A$ ou $y \in A$. O número de retornos de y a y antes de alcançar A tem distribuição geométrica de parâmetro

$$E_A(y,y) = \frac{P_A(y,y)}{1-P_A(y,y)}.$$

Ao começar de x, devemos primeiro visitar y pela primeira vez, com probabilidade $P_A(x,y)$. Alcançando y, o número total de visitas a y antes de alcançar A é 1 mais o número total de retornos de y a y, isto é

$$E_A(x,y) = P_A(x,y)(1+E_A(y,y)).$$

Concluimos

$$E_A(x,y) = \frac{P_A(x,y)}{1-P_A(y,y)}, \quad \forall x,y.$$

Exemplo 0.10. Retornemos ao primeiro exemplo e determinemos o número esperado de vezes que os dois jogadores retornem a seus capitais iniciais antes que ocorra a ruína de um deles.

No exemplo temos $p=q=\frac{1}{2}$, $a=0$, $x=5$ e $b=15$. A probabilidade de retornar aos capitais originais antes da ruína de um deles é

$$P_{\{0,15\}}(5,5) = 1 - \frac{\frac{1}{2}.15}{5.10} = 0,85.$$

Portanto o número esperado de vezes que ambos os jogadores voltam aos seus capitais iniciais antes que ocorra a ruína de um deles é

$$E_{\{0,15\}}(5,5) = \frac{P_{\{0,15\}}(5,5)}{1-P_{\{0,15\}}(5,5)} = \frac{0,85}{0,15} = 5,67.$$

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil