

Universidade de São Paulo

Instituto de Física
Mecânica II

Teoria do caos

Grupo:

Beatriz Siqueira

Bruno Borges

Luan Lima

Otávio Vasques

Professor: Airton Deppman

Novembro
2017

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Parte I: Introdução teórica, definições e métodos	1
2.1	Teorema KAM [3]	2
2.2	Tratamento de sistemas dinâmicos	2
2.2.1	Mapa de Poincaré [2]	3
2.2.2	Método de discretização de equações diferenciais de Euler [1]	4
2.2.3	Atratores	5
3	Parte II: Exemplos e problemas	5
3.1	Pendulo Duplo [4]	5
3.2	Mapa Logístico e diagrama de Feigenbaum	8
4	Conclusão	11
5	Apêndice	12
5.0.1	Script para o mapa logístico em Matlab	12

1 Introdução

Após o mundo tomar conhecimento da segunda lei de Newton, que permite descrever o movimento de um sistema dinâmico com N graus de liberdade por meio de N equações diferenciais de segunda ordem, era unânime o pensamento de que, desde de que o movimento de um sistema estivesse em cada intervalo de tempo conectado suavemente com o movimento no intervalo anterior, as equações do movimento teriam soluções que mudariam suavemente quando as condições do movimento fossem suavemente perturbadas.

Gerações de físicos pensaram dessa maneira, de que todos os problemas de mecânica teriam soluções analíticas. Por volta de 1830 com o surgimento dos formalismos de Lagrange e Hamilton muitos problemas físicos como a título de exemplo, o pêndulo duplo, se mostraram indiscutivelmente mais apropriados serem abordados por esses formalismos do que o formalismo de Newton. E acreditava-se que, se as equações do movimento não tivessem uma solução analítica, era apenas uma questão de não se ter desenvolvido ainda um método matemático capaz de resolvê-las.

Essa ideia cai por terra após o descobrimento de *Caos* por meio do trabalho de Poincaré sobre o problema de três corpos. Poincaré mostrou que não era possível ter uma solução analítica para o movimento de uma massa m que se move na presença de um campo gravitacional de duas outras massas fixas no espaço. Mesmo quando a massa m é pequena em relação as massas fixas.

... pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no final do fenômeno. Um pequeno erro no começo produzirá um enorme erro mais tarde. Predições tornam-se impossíveis e temos um fenômeno imprevisível.

(Poincaré sobre o problema dos três corpos)

Intuitivamente podemos pensar em Caos como sistemas dinâmicos nos quais as condições iniciais exatas das equações diferenciais produzem corretamente informações apropriadas sobre a evolução temporal. Mas condições iniciais aproximadas não!

2 Parte I: Introdução teórica, definições e métodos

Não existe um consenso entre comunidade científica de uma definição precisa para Caos, dado a grande quantidade de trabalhos produzidos na área de sistemas dinâmicos, com grande contribuições do brasileiro Artur Ávila iremos fazer uma descrição mais global de Caos e sistemas caóticos. Nós sabemos que todos os sistemas definidos a partir de uma Hamiltoniana H tem sua dinâmica definida pelas equações de Hamilton.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (1)$$

Naturalmente todo sistema cuja a formulação acima é possível é dito dinâmico, porém os sistemas interessantes a teoria do caos são aqueles não lineares, tipicamente em que as soluções são mais difíceis de encontrar. A partir disso dizemos que um sistema é caótico quando as soluções do sistema divergem exponencialmente ¹ quando suas condições iniciais são perturbadas. Parte da dificuldade de se obter obter soluções usuais para sistemas caóticos é o fato de que não podemos utilizar a teoria canônica de perturbações, exatamente porque as soluções para pontos muito próximos são completamente diferentes.

2.1 Teorema KAM [3]

Dado um problema físico real podemos sempre escrever sua dinâmica por $H = H_o + \Delta H$. Isto é, um termo integrável H_o (Hamiltoniana integrável) mais uma pequena interação não integrável ΔH (Hamiltoniana de perturbação) que é não integrável.

A ideia é fazer repetidas interações de pequenas perturbações para poder analisar o sistema quando esse é perturbado.

Há um importante teorema, o **teorema de KAM**, que permite dizer sobre que condições uma perturbação ΔH em H_o pode acabar com a regularidade do sistema. O teorema pode ser enunciado da seguinte maneira:

Se o movimento limitado de uma hamiltoniana integrável H_o é alterada por uma pequena perturbação, ΔH , que torna a Hamiltoniana, $H = H_o + \Delta H$ não integrável e se as duas condições seguintes são satisfeitas:

(a) a perturbação ΔH é pequena, e

(b) a frequência ω_i é incomensurável

então o movimento permanece confinado em um N -toros, exceto para um negligenciável conjunto de condições iniciais que resultam de uma trajetória curvilínea na superfície de energia.

Esse teorema foi demonstrado por vias diferentes por Kolmogorov, Arnold e Moser. Sua demonstração não será dada aqui por fugir ao escopo desse trabalho e principalmente pelo alto nível de sofisticação matemática necessária em sua demonstração, o leitor interessado deve procurar por M.Berry (não sei colocar a referência). A partir disso temos um critério para dizer quando um sistema pode evoluir para um regime caótico ou não, quando o teorema KAM não é válido o caos pode ocorrer.

2.2 Tratamento de sistemas dinâmicos

Vemos então que o estudo de sistemas caóticos está em desvendar em que circunstâncias um determinado sistema passa de um regime bem-comportado para

¹O uso da palavra "exponencialmente" foi usado sentido de diferenças enormes e não no sentido da função exponencial.

um regime caótico, para fazer tal análise vamos encarar as equações de Hamilton como um sistemas de mapas no espaço de fase. As equações de Hamilton são definidas a partir das derivadas parciais no tempo, indicando um mapa contínuo. Porém para obtermos mais informações e permitir o uso das ferramentas utilizadas em sistemas dinâmicos é necessário realizar a discretização desses mapas contínuos. Essa discretização pode ser feita de duas formas, com o método de discretização de equações diferenciais de Euler ou olhando para o Mapa de Poincaré.

2.2.1 Mapa de Poincaré [2]

O mapa de Poincaré é particularmente útil para sistemas periódicos, onde se estabelecem órbitas, com isso podemos, ao escolher uma seção transversal, estudar como os pontos que cruzam essa seção evoluem no tempo. Dado um sistema Hamiltoniano com N posições, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, e N momentos, $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, o espaço formado pelo conjunto de vetores na forma (\mathbf{q}, \mathbf{p}) formam um espaço vetorial $2N$ -dimensional denominado espaço de fase X . Dada as $2N$ soluções para os momentos e posições

$$\xi(t, \xi_0) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t), p_1(t), p_2(t), \dots, p_N(t))$$

denominamos como trajetória ou órbitas, no caso de sistemas periódicos, o conjunto $A = \{\xi(t, \xi_0), t > 0\}$. Importante notar que para se encontrar as soluções é necessário determinar $2N$ condições iniciais, $\xi_0 = (\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$.

Seja, então, P um subespaço de X de $N-1$ dimensões transversal às orbitas $\xi(t, \xi_0)$ no tempo t_0 , esta seção denomina-se seção de Poincaré. Escolhe-se um ponto $p_0 = \xi(t_0, \xi_0)$ tal que $p_0 \in P$. A partir desse ponto podemos, assumindo uma certa periodicidade das órbitas, olhar para os pontos da trajetória ξ que atravessam a seção P .

$$p_1 = \xi(t_0 + \tau_1, \xi_0) \in P$$

$$p_2 = \xi(t_0 + \tau_2, \xi_0) \in P$$

$$p_3 = \xi(t_0 + \tau_3, \xi_0) \in P$$

$$p_4 = \xi(t_0 + \tau_4, \xi_0) \in P$$

.
.
.

Notemos que os tempos τ_i não são necessariamente iguais, indicando trajetórias ligeiramente diferentes para cada período. Com isso podemos definir então o mapa de Poincaré como sendo o mapa que leva do ponto p_i para o ponto p_{i+1} , $\phi : P \rightarrow P$.

$$p_{k+1} = \phi(p_k) \tag{2}$$

A partir de um ponto inicial p_0 podemos obter as sucessivas iteradas do mapa ϕ a partir da notação $\phi \circ \phi(p_k) \equiv \phi^2(p_k)$

$$p_{k+l} = \phi^l(p_k) \quad (3)$$

Com essa descrição podemos empregar as técnicas de sistemas dinâmicos, a dificuldade porém a partir desse método é obter uma expressão analítica para o mapa de Poincaré, que tipicamente é muito difícil de se obter, sendo apenas utilizado em simulações numéricas.

2.2.2 Método de discretização de equações diferenciais de Euler [1]

Como vimos anteriormente toda dinâmica do sistema pode ser obtida a partir das equações de Hamilton.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = f(q, p, t) \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = g(q, p, t) \quad (4)$$

As derivadas parciais das Hamiltoniana definem um sistema de equações diferenciais, vemos que os termos a direita podem ser escritos como funções da variável a esquerda e do tempo. Quando as funções g e f dependem do tempo dizemos que o sistema é não-autônomo, quanto as funções f e g não dependem do tempo dizemos que o sistema é autônomo, nos restringiremos a estudar apenas o segundo caso.

$$\dot{q} = f(q, p) \quad , \quad \dot{p} = g(q, p) \quad (5)$$

Utilizando a mesma notação da seção anterior podemos reescrever as equações acima de forma mais compacta.

$$\dot{\xi} = F(\xi) \quad (6)$$

Utilizando as técnicas de integração numéricas de Euler temos a seguinte aproximação

$$\xi(t + \Delta t) \approx \xi(t) + \Delta t F(\xi(t)) \quad (7)$$

Dessa forma conseguimos criar um mapa discreto que descreve em uma certa aproximação o sistema original, desde que o passo Δt seja pequeno o suficiente. Com essa descrição podemos empregar novamente as técnicas de sistemas dinâmicos.

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \Delta t F(\xi_k) \quad (8)$$

É comum escrever a função F como dependente de um parâmetro a , um parâmetro de controle, em que se estuda os regimes caóticos e não caóticos a partir da variação dessa grandeza. Tipicamente a grandeza a é alguma condição inicial ou algum parâmetro estático como o braço de um pendulo ou a massa de uma partícula.

2.2.3 Atratores

A partir das definições estabelecidas acima podemos prosseguir com a linguagem e ferramentas estabelecidas na área de sistemas dinâmicos.

Um dos pontos importantes para o estudo de caos é o conceito de atrator. Um atrator é um subconjunto do espaço de fase em que o sistema, uma vez dentro desse subconjunto, fica confinado em todos os instantes subsequentes. Atratores típicos são os pontos fixos, um ponto em que $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, de dimensão nula, órbitas que como definida acima são tipicamente atingidas após algum efeito transiente desaparecer, como por exemplo o oscilador harmônico forçado amortecido, superfícies toroidais (hiper-toroides tipicamente) que são superfícies no espaço de fase e os atratores estranhos. Atratores estranhos são particularmente interessantes porque são bem comuns em sistemas caóticos e apresentam uma estrutura peculiar, tipicamente são regiões dispersas, com estrutura fractal e dessa forma pode-se empregar todo o conhecimento desenvolvido para fractais no estudo desse tipo atrator.

3 Parte II: Exemplos e problemas

3.1 Pendulo Duplo [4]

O pêndulo duplo consiste em dois pêndulos simples acoplados como vemos na imagem 1. Embora seja um sistema aparentemente simples, pode apresentar comportamento caótico. Temos dois limites, para baixas energias o sistema se comporta como um típico caso de um oscilador harmônico acoplado, para altas energias pode se ainda obter a solução analiticamente já que a além da energia conservada temos conservação do momento total angular. No intervalo entre esses limites o sistema apresenta comportamento caótico.

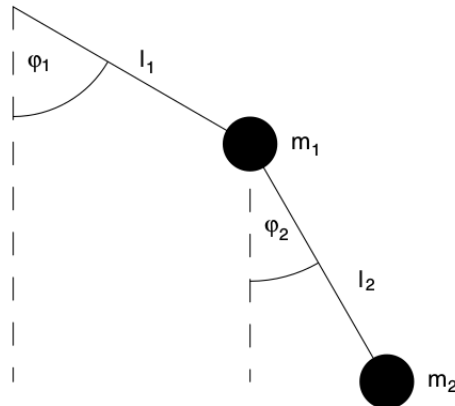


Figura 1: Pêndulo duplo

Considerando a Langrangiana, $\mathcal{L} = T - V$ do sistema. Considerando coordenadas x e y , sendo 0 da origem centro de rotação de m_1 temos.

$$T = \frac{1}{2}[m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)]$$

$$V = g(m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

Como,

$$x_1 = \frac{l}{2} \text{sen} \varphi_1; \quad y_1 = \frac{l}{2} \text{cos} \varphi_1$$

$$x_2 = l(\text{sen} \varphi_2 + \frac{1}{2} \text{sen} \varphi_1); \quad y_2 = -l(\text{cos} \varphi_1 + \frac{1}{2} \text{cos} \varphi_2)$$

Obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[l_1^2(m_1 + m_2)\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 m_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l_1 l_2 m_2 \text{cos}(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2 \dot{\varphi}_2^2] + gl_1(m_1 + m_2)\text{cos} \varphi_2 + gl_2 m_2 \text{cos} \varphi_2 \quad (9)$$

Calculando $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} = 0$. Sendo $\varphi_i = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, obtemos duas equações:

$$l_1(m_1 + m_2)\ddot{\varphi}_1 + l_2 m_2 [\text{cos}(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_2 + \text{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_2^2] + g(m_1 + m_2)\text{sen} \varphi_1 = 0$$

$$l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 [\text{cos}(\varphi_1 - \varphi_2)\ddot{\varphi}_1 - \text{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1^2] + g \text{sen} \varphi_2 = 0$$

A partir dessas equações podemos computar as seções de Poincaré em diversos regimes e a trajetória no espaço de fase. Fixando $m_2 = 1$, $l_2 = 1$, $g = 1$, $m_1 = 3$ e $l_1 = 2$ é possível, a partir das equações acima, simular o movimento do pêndulo. Fixando algumas coordenadas podemos ver a seção de Poincaré em um dado plano para diversas energias. Fazendo $\varphi_1 = 0$ e tomando $\omega_1 > 0$ podemos olhar para as outras duas coordenadas, φ_2 e ω_2 .

Para a construção das seções de Poincaré toma-se o sistema partindo das condições de equilíbrio ligeiramente perturbadas.

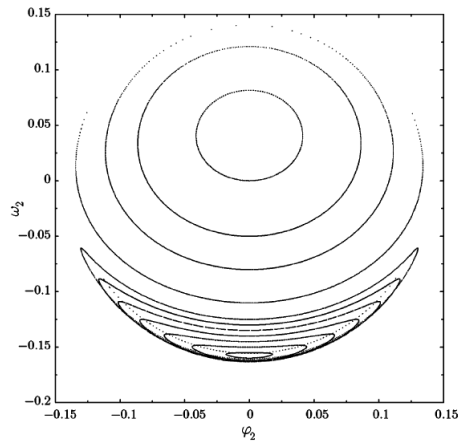


Figura 2: Seção de Poincaré com o sistema iniciando com as duas massas para baixo, $\varphi_1 \approx 0$ e $\varphi_2 \approx 0$.

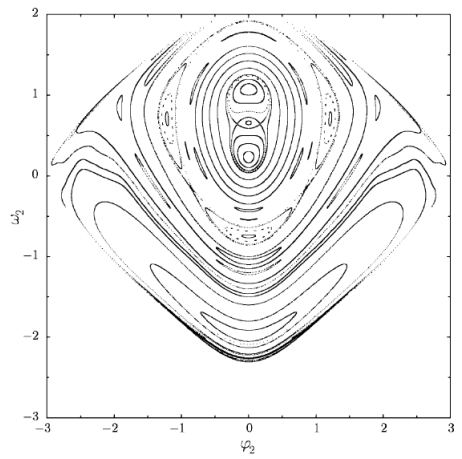


Figura 3: Seção de Poincaré com o sistema iniciando com a primeira massa para baixo e a segunda massa para cima, $\varphi_1 \approx 0$ e $\varphi_2 \approx \pi$.

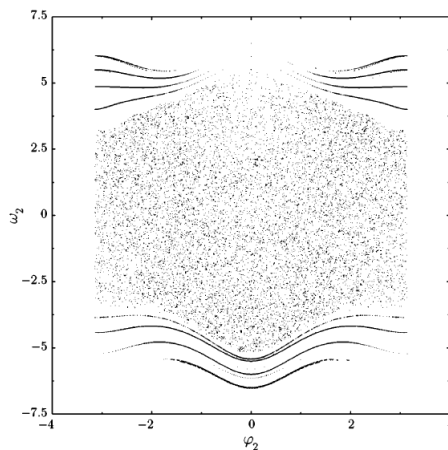


Figura 4: Seção de Poincaré com o sistema iniciando com a primeira massa para cima e a segunda massa para baixo, $\varphi_1 \approx \pi$ e $\varphi_2 \approx 0$.

Podemos observar que na figura 2 as órbitas são estáveis, porém a sua natureza caótica faz com que o sistema atravesse vários trechos da seção. Na figura 3 já podemos observar as distorções das órbitas da figura anterior com pequenas regiões de caos. Já na figura 4 vemos que a maior parte da figura é um mar de pontos indicando caos, nesse estágio já não temos mais indício nenhum do comportamento do sistema.

3.2 Mapa Logístico e diagrama de Feigenbaum

Provavelmente, um dos mais bonitos e importante exemplos na teoria do caos é o mapa logístico. Este modelo baseia-se na função logística comum de curvas que mostra como uma população cresce lentamente e, em seguida, rapidamente, antes de afunilar-se à medida que atinge uma determinada capacidade.

A função logística usa uma equação diferencial que trata o tempo como contínuo. O mapa logístico, em vez disso, usa uma equação de diferencial não linear para observar etapas discretas de tempo. É chamado de mapa logístico porque mapeia o valor da população em qualquer momento do seu valor na próxima etapa.

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t)$$

Esta equação define as regras, ou dinâmicas, de um sistema: x representa a população em qualquer instante t e r representa a taxa de crescimento. Em outras palavras, o nível de população em qualquer momento é uma função do parâmetro de taxa de crescimento e do nível de população do passo anterior. Se a taxa de crescimento for muito baixa, a população vai morrer e desaparecer. Taxas de crescimento mais altas podem se estabelecer em direção a um valor estável ou flutuam em uma série de booms populacionais.

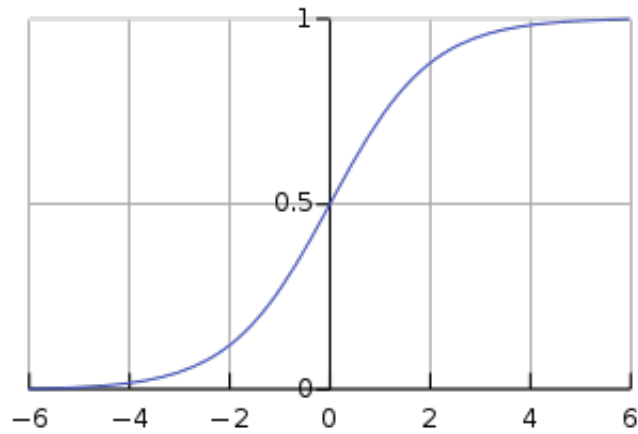


Figura 5: $f(x) = \frac{l}{1+e^{-k(x-x_0)}}$

Para ilustrar o modelo foi feito um script em MATLAB, onde simulamos o modelo para 500 gerações, para 3000 valores da taxa de crescimento entre 0 e 4:

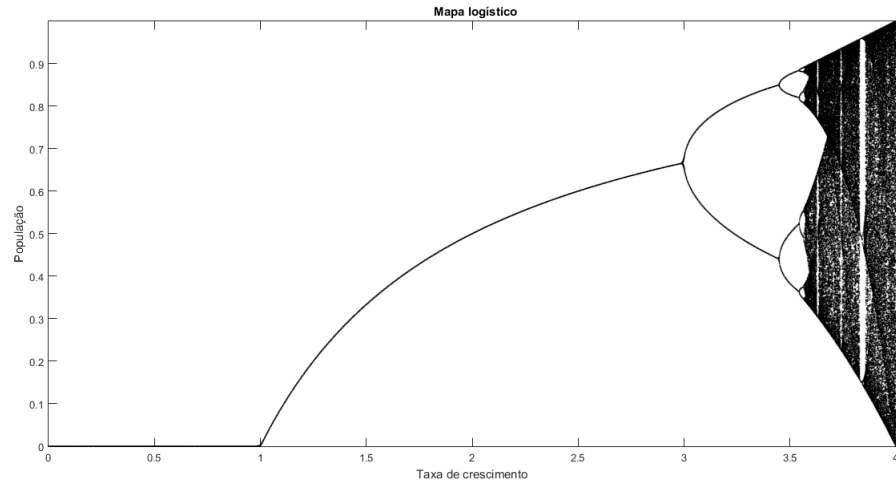


Figura 6: Diagrama de Feigenbaum

A figura acima as vezes é chamada de Diagrama de Feigenbaum em homenagem ao trabalho do físico Mitchell Feigenbaum. Este diagrama pode ser pensado como 3000 fatias verticais discretas, cada uma correspondente a um dos 1000 parâmetros da taxa de crescimento (entre 0 e 4). Para cada uma dessas fatias,

executei o modelo 500 vezes, assim, cada fatia vertical representa os valores de população que o mapa logístico se ajusta para esse valor de parâmetro. Em outras palavras, a fatia vertical acima de cada taxa de crescimento é a "atração" de taxas de crescimento.

Para taxas de crescimento inferiores a 1 o sistema sempre colapsa para zero (extinção). Para taxas de crescimento entre 1 e 3, o sistema sempre se instala em um nível de população exato e estável. Mas para algumas taxas de crescimento, como 3.9, o diagrama mostra 100 valores diferentes, ou seja, um valor diferente para cada uma das suas 100 gerações. Nunca se ajusta a um ponto fixo ou a um ciclo limite.

Essa figura também é chamada de diagrama de bifurcação. Na fatia vertical acima da taxa de crescimento 3.0, os possíveis valores populacionais bifurcam em caminhos discretos. Com a taxa de crescimento 3.2, o sistema oscila exclusivamente entre dois valores populacionais: um em torno de 0,5 e o outro em torno de 0,8. Em outras palavras, a essa taxa de crescimento, ao aplicar a equação logística a um desses valores, ela produz o outro. Observe que logo após a taxa de crescimento 3.4, o diagrama se divide novamente em quatro caminhos. Após a taxa de crescimento 3,5, ela se recomeça novamente em oito caminhos. Aqui, o sistema oscila em mais de oito valores populacionais.

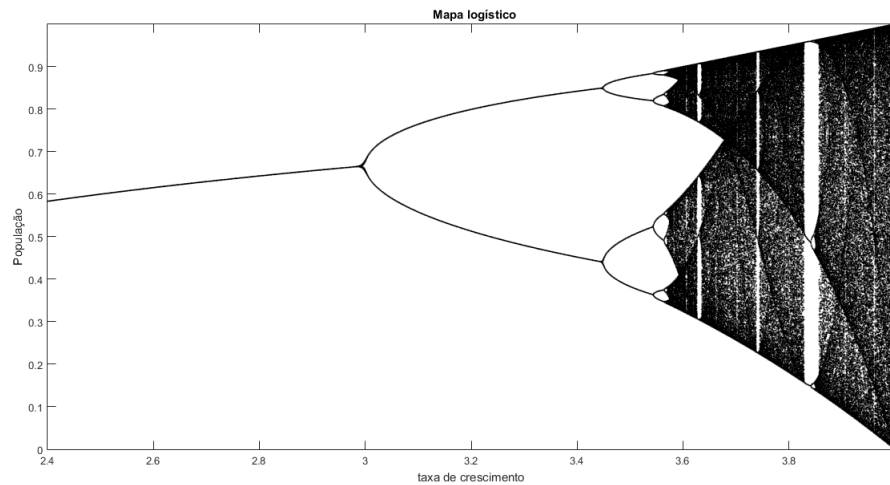


Figura 7: Taxas de crescimento entre 2,8 e 4,0

Além de uma taxa de crescimento de 3,6, no entanto, as bifurcações aumentam até que o sistema seja capaz de eventualmente desembarcar em qualquer valor populacional. Isto é conhecido como o **caminho de duplicação de tempo para o caos**. À medida que você ajusta o parâmetro de taxa de crescimento para cima, o mapa logístico irá oscilar entre dois, então, quatro, então,

oito, então, 16, então, 32 (e assim por diante) valores de população. Estes são períodos, assim como o período oscilação de um pêndulo.

No momento em que atingimos a taxa de crescimento 3.9, bifurcou tantas vezes que o sistema agora salta, aparentemente aleatoriamente, entre todos os valores populacionais. Quando falamos aparentemente aleatoriamente é porque definitivamente não é aleatório. Em vez disso, esse modelo segue regras determinísticas relativamente simples, mas produz uma aleatoriedade aparente. Isso pode ser uma definição de caos: determinístico e aperiódico.

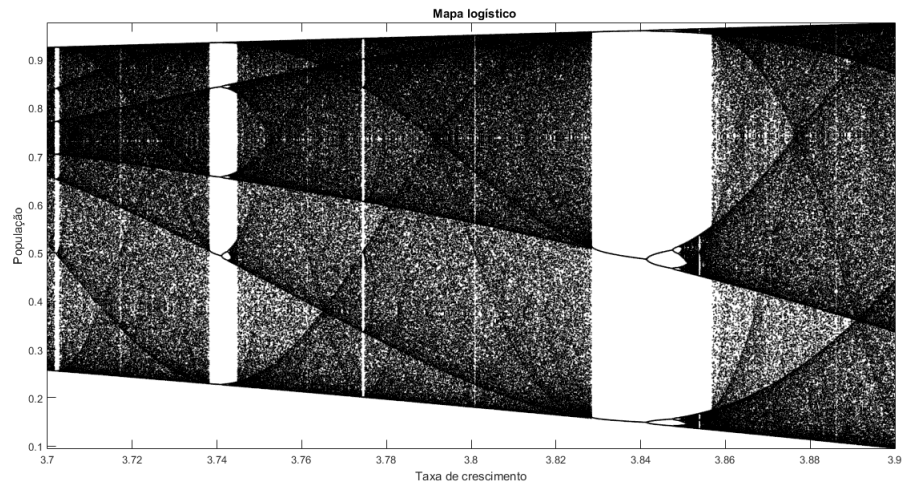


Figura 8: Taxas de crescimento entre 3.7 e 3.9

4 Conclusão

Ao se estudar mecânica em nível de graduação há uma falsa impressão, devido aos exemplos e exercícios apresentados nos livros didáticos, de que os problemas físicos em geral possuem solução analítica. Mas é justamente o contrário a verdade.

Este trabalho permitiu identificar que além da maioria dos problemas físicos terem apenas solução numérica alguns deles podem apresentar um comportamento caótico. Isto é soluções aproximadas não descrevem o a evolução temporal de um sistema dinâmico. É portanto uma nova abordagem se faz necessária para estudar tais tipos de problemas, daí a necessidade por exemplo de, secção de Poincaré, atratores, e bifurcações Em suma, sistemas caóticos deram origem a um novo e vasto ramo da física com aplicações que transcende essa última como o exemplo do mapa logístico.

[2]

5 Apêndice

5.0.1 Script para o mapa logístico em Matlab

```
————- LOGISTIC MAP —————  
A1 = .5;  
B1 = 2.9;  
phin1 = -0.35;  
Fina = [];  
phi1(1) = ( B1*[(A12) - (phin12)] - A1;  
  
for ii = 1:1:100  
  B1 = B1 + .01 ;  
  for ih = 2:1:300  
    phi1(ih) = ( B1*[(A12) - (phi1(ih - 1)2)] - A1;  
  end  
  Fina = [Fina phi1(20:length(phi1))];  
end  
  
  figure(1);  
  plot(Fina,'r');  
  title('Bifurcation plot of LOGISTIC map');
```

Referências

- [1] Thomas Schreiber Holger Kantz. *Nonlinear Time Series Analysis, 2nd Edition*. 2 edition, 2004.
- [2] Eugene J. Saletan Jorge V. José. *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [3] Herbert Goldstein Charles P. Poole John Safko. *Classical Mechanics*. Pearson, 3 edition, 0.
- [4] Tomasz Stachowiak and Toshio Okada. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. 29:417–422, 07 2006.