0.1. **Dominios de Atração.** Na aula anterior analisamos o resultado, básico, que o mínimo (máximo) de uma amostra aleatória pode ter entre três possíveis limites em distribuições. Nesta aula caracterizaremos classes de distribuições nas quais o mínimo (máximo) de amostras aleatórias converge para cada um dos três tipos, que são chamadas domínios de atração. Precisamente

Definição 0.1. Uma distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de uma distribuição G se existem constantes a_n e b_n, tais que $\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x)$. Semelhantemente, F pertence ao domínio de atração maximal de G se existem constantes a_n e b_n, tais que $F^n(a_n x + b_n) \to^D G(x)$.

O nosso objetivo é determinar os domínios de atrações minimais para W_1, W_2 e Λ, e os domínios de atrações maximais para W_1^*, W_2^* e Λ^*. Necessitaremos do seguinte Lema:

Lema 0.2.

$$\overline{F}^n(a_n x + b_n) \to^D \overline{G}(x) \Leftrightarrow nF(a_n x + b_n) \to^D -\ln \overline{G}(x).$$

para todo ponto de continuidade de $G(x)$*, com* $\overline{G}(x_0) \neq 0$*,*

Prova:

Sob quaisquer das condições

$$\lim_{n\to\infty} \overline{F}((a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} (\overline{F}^n((a_n x + b_n))^{\frac{1}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} (\overline{G}(x))^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Note também que $1 - y \leq \int_y^1 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{y}(1 - y)$*.*

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}(a_n x + b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{nFa_n x + n_n)}{\overline{F}(a_n x + b_n)},$$

e segue que

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} -n \ln \overline{F}^n(a_n x + b_n).$$

O teorema 3 dá condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração minimal da distribuição de Weibull. O Corolário 4 trata de condições, necessária e suficiente, para uma função de distribuição pertencer ao domínio de atração maximal de W_1^*.

Teorema 0.3. Domínio de atração minimal de $W_1(x)$

A distribuição F *pertence ao domínio de atração minimal de* $W_1(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}, x \geq 0, (\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

A) Existe x_0 *tal que* $F(x_0) = 0$ *e* $F(x_0 + \varepsilon) > 0$, $\forall \varepsilon > 0$*;*
B)) $\lim_{t \downarrow 0} [\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = x^{\alpha}$*, para* $x > 0, (\alpha > 0)$*.*

Prova:

A condição é suficiente. Considere $x_0 = 0$ *e* $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$ *de maneira que* $\lim_{n \to \infty} nF(a_n) = 1$*.*

Por hipótese $\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = x^{\alpha}, x > 0$*. Então*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F(a_n x)}{F(a_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{nF(a_n x)}{nF(a_n)} = \lim_{n \to \infty} nF(a_n x),$$

e pelo Lema , $-\ln \overline{W_1}(x) = x^{\alpha}$ *e* $\overline{W_1}(x) = e^{-x^{\alpha}}$*.*

A condição necessária pode ser encontrada em Gnedenko (1943).

Corolário 0.4. Domínio de atração maximal de $W_1^*(x)$ *A distribuição* F *pertence ao domínio de atração maximal de* $W_1^*(x) = e^{-(-x)^{\alpha}}, x \leq 0 (\alpha > 0)$ *se, e somente se,*

A) Existe x_1 *tal que* $F(x_1) = 1$ *e* $F(x_1 - \varepsilon) < 1$, $\forall \varepsilon > 0$*;*
B)) $\lim_{t \uparrow 0} [\frac{\overline{F}(xt+x_1)}{\overline{F}(t+x_1)}] = x^{\alpha}$*, para* $x > 0, (\alpha > 0)$*.*

Observação 0.5. Observe que $\max\{X_1, ..., X_n\} = -\min\{-X_1, ..., -X_n\}$ e $F_{-X}(x) = P(-X \leq x) = P(X \geq -x) = 1 - F_X(-x)$.

Portanto, utilizando a parte A) do teorema anterior, $F_{-X}(x_0) = 0 \to 1 - F_X(-x_0) = 0 \to F_X(-x_0) = 1$ é suficiente considerar $x_1 = -x_0$ de maneira que

$$F_{-X}(x_0 + \varepsilon) > 0 \to 1 - F_X(-x_0 - \varepsilon) > 0 \to F(x_1 - \varepsilon) < 1,$$

e

$$x^{\alpha} = \lim_{t \downarrow 0} [\frac{F_{-X}(xt + x_0)}{F_{-X}(t + x_0)}] = \lim_{-t \uparrow 0} [\frac{1 - F_X(-xt - x_0)}{1 - F_X(-t - x_0)}] = \lim_{t \uparrow 0} [\frac{\overline{F}(xt + x_1)}{\overline{F}(t + x_1)}].$$

Exemplo 0.6. A função de distribuição

$$F(x) = 1 - k(a - x)^{\alpha}, \quad a - k^{\frac{-1}{\alpha}} \leq x \leq a, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração minimal de $W_1(x)$. Considere $x_0 = a - k^{\frac{-1}{\alpha}}$. Portanto

$$\lim_{t\downarrow 0}[\frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)}] = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1-k[a-xt-a+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha}}{1-k[a-t-a+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha}} =$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{k\alpha[-xt+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha-1}(-x)}{k\alpha[-xt+k^{\frac{-1}{\alpha}}]^{\alpha-1}} = x^{\alpha}.$$

Teorema 0.7. Domínio de atração minimal de $W_2(x)$
A) A distribuição F pertence ao domínio de atração minimal de $W_2(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}}, x \leq 0, (\alpha > 0)$ se, e somente se,

$$\lim_{t\downarrow -\infty}\frac{F(t)}{F(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

B) A distribuição F pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x) = e^{(-x)^{-\alpha}}, x \geq 0(\alpha > 0)$ se, e somente se,

$$\lim_{t\uparrow\infty}\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = x^{\alpha}, \quad \forall x > 0.$$

Exemplo 0.8. A função de distribuição

$$\overline{F}(x) = kx^{-\alpha}, \quad k > 0, \alpha > 0$$

pertence ao domínio de atração maximal de $W_2^*(x)$, pois

$$\lim_{t\downarrow -\infty}\frac{\overline{F}(t)}{\overline{F}(tx)} = \frac{kt^{-\alpha}}{kt^{-\alpha}x^{-\alpha}} = x^{\alpha}.$$

Teorema 0.9. Domínio de atração minimal de $\Lambda(x)$ *A distribuição F pertence ao domínio de atração de $\Lambda(x) = 1 - e^{-e^{x}}$ se existe x_0 tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0+\varepsilon) > 0$, $\forall\varepsilon > 0$ e*

$$\lim_{x\downarrow x_0}\frac{d}{dx}[\frac{1}{\phi'(x)}] = 0,$$

onde $\phi(x) = -\ln F(x)$.

Von Mises (1939) apresentou condições para que uma função de distribuição F pertença ao domínio de atração maximal da distribuição de Gumbel,, Λ^*.

Teorema 0.10. Domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$ *A) Considere a função de distribuição* $F(x)$, *com* $F(x) < 1, \forall x$ *e*

$$\lim_{x\uparrow\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0,$$

onde $r(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}$. *Então* F *pertence ao domínio de atração maximal de* $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$, *com* $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ *e* $a_n = \frac{1}{nf(b_n)}$.

B) Se existe x_1 *tal que* $F(x_1) = 1$ *e* $F(x_1 - \varepsilon) < 1$, $\forall\varepsilon > 0$ *e* $\lim_{x\uparrow x_1} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = 0$, *então* F *pertence ao domínio de atração maximal de* $\Lambda^*(x) = e^{(-e)^{-x}}$.

Exemplo 0.11. A função de distribuição

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty$$

pertence ao domínio de atração maximal de $\Lambda^*(x)$.

Temos que

$$\overline{F}(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}, \quad r(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Portanto

$$\lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[\frac{1}{r(x)}] = \lim_{x\downarrow-\infty} \frac{d}{dx}[1+e^{-x}] = \lim_{x\downarrow-\infty} -e^{-x} = 0.$$

Como $F^{-1}(y) = -\ln(\frac{1}{y}-1)$, $\overline{F}(b_n) = \frac{1}{n}$ implica que $b_n = F^{-1}(\frac{n-1}{n}) = ln(n-1)$.

Em adic cão $f(b_n) = \frac{n-1}{n^2}$ implica que $a_n = \frac{1}{nf(b_n)} = \frac{n}{n-1}$.

Portanto

$$F^n(a_n x+b_n) = F^n(\frac{n}{n-1}x+\ln(n-1)) = (\frac{1}{1+e^{-(\frac{n}{n+1}x+\ln(n-1))}})^n = (1-(-\frac{e^{-\frac{n}{n-1}x}}{n-1}))^{-n}.$$

e $\lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = e^{(-e)^{-x}}$.

Lema 0.12. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias indendentes e identicamente distribuidas com uma função de distribuição contínua* F *e sejam* $U_n = nF(X_{(n;1)})$ *e* $V_n = n[1 - F(X_{(n;n)})]$. *Então,* $U_n \to^D Exp[1]$ *e* $V_n \to^D Exp[1]$.

Prova:

$$P(V_n \leq v) = P(n[1-F(X_{(n;n)} \leq v) = P(F(X_{(n;n)} \geq 1-\frac{v}{n}) = 1-P(F(X_{(n;n)} \leq 1-\frac{v}{n}) =$$

$$1-P(X_{(n;n)} \leq F^{-1}(1-\frac{v}{n})) = 1-P(X_1 \leq F^{-1}(1-\frac{v}{n})) = 1-(1-\frac{v}{n})^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(V_n \leq v) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1 - \frac{v}{n})^n = 1 - e^{-v}.$$

e $V_n \to^D Exp[1]$.

As definições e resultados que seguem estão na pg 226 do livro From finite sample asymptotic methods in statistic de P.K.Sen, J.M.Singer e A.C.P.Lima (2010)

Definição 0.13. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F, então:

A) F é do tipo Cauchy, se existirem $k > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\lim_{x\to-\infty} |x|^k F(x) = c.$$

B) F é do tipo exponencial em um ponto $\xi_{0;n}$ com $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ se F é continuamente diferenci' avel e

$$\frac{f(x)}{F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

quando $x \to -\infty$.

C) F tem um contato terminal de ordem m em um ponto $\xi_{1;n}$ com $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$ se $F(\xi_{1;n}) = 1$, as derivadas à esquerda $F^{(j)}(\xi_{1;n}) = 0, j = 1, ..., m$ e $F^{(m+1)}(\xi_{1;n}) \neq 0$.

Observação 0.14. Distribuições do tipo exponencial tem momentos finitos de todas as ordens e inclue aquelas comumente empregadas nos métodos estatísticos, tais como a exponencial, normal e gama. Por outro lado as distribuições do tipo Cauchy não tem momentos finitos de ordem $\geq k$ e leva o nome da distribuição típica de Cauchy, para a qual, $k = 1$. Em geral, as distribuições assintóticas dos mínimos amostrais dependem do tipo de distribuição envolvida.

As definições A e B são adequadas para analisar distribuições assintóticas para o mínimo de variáveis aleatórias. para estudarmos as distribuições assintóticas para o máximo de variáveis aleatórias pequenas modificações devem ser consideradas: As distribuições do tipo Cauchy deve ser analizada na vizinhança de ∞

$$\lim_{x\to\infty} |x|^k \overline{F}(x) = c.$$

As distribuições do tipo exponencial são tais que

$$-\frac{f(x)}{1 - F(x)} \approx \frac{f^{(1)}(x)}{f(x)} \approx \frac{f^{(2)}(x)}{f^{(1)}(x)} \approx ....$$

Exemplo 0.15. A distribuição de Cauchy padrão é do tipo Cauchy com $k = 1$ pois:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi^{-1}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+y^2}dy}{\frac{1}{|x|}} \approx \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{|x|^2}} = 1.$$

A distribuição normal padrão é do tipo exponencial, pois nas vizinhança de $-\infty$ temos

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{x}(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{y^2}{2}}dy} \approx \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}} \approx -x$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - (\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2}{(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)} \approx -x + \frac{1}{x} \approx -x$$

na vizinhança de $-\infty$

A distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ tem um contato terminal de ordem 0 em um ponto $\xi_{1;n} = \theta$.

Teorema 0.16. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq t) = 1 - e^{-(-x)^{-k}}, \quad x < 0,$$

onde $\xi_{0;n}$ é tal que $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$.
Prova: *Observe que*

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = \frac{F(X_{(n;1)})}{\frac{1}{n}} = \frac{F(X_{(n;1)})}{F(\xi_{0;n})} =$$

$$|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k.\frac{|X_{(n;1)}|^k F(X_{(n;1)}}{F(\xi_{0;n})|\xi_{0;n}|^k} \to |\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k.\frac{c}{c}.$$

Portanto, para $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}} \leq x) = \lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_{(n;1)}}{\xi_{0;n}}| \geq |x|) =$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{\xi_{0;n}}{X_{(n;1)}}|^k \geq |x|^{-k}) = 1 - e^{-|x|^{-k}} = 1 - e^{-(-x)^{-k}}.$$

Corolário 0.17. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo Cauchy. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}}{\xi_{1;n}} \leq t) = e^{(-t)^{-k}}, \quad t \geq 0,$$

onde $\xi_{1;n}$ é tal que $F(\xi_{1;n}) = 1 - \frac{1}{n}$.

Teorema 0.18. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição F do tipo exponencial. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n} \leq x) = 1 - e^{-e^x}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{0;n}) = \frac{1}{n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Prova: *Usando a série de Taylor em torno de $\xi_{0;n}$, temos*

$$F(\xi_{0;n}) + s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(\xi_{0;n})s^n}{n!} = F(\xi_{0;n}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})s^k}{k!}.$$

Portanto

$$F(X_{(n;1)} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!}$$

e

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})(X_{(n;1)} - \xi_{0;n})^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k a_n^k}{k!},$$

onde $t = \frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}$ e $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0;n})}$.

Contudo, podemos escrever

$$n\frac{f^{(k-1)}(\xi_{0;n})t^k}{(nf(\xi_{0;n}))^k k!} = \frac{t^k}{k!}[\frac{F(\xi_{0;n})^k}{f(\xi_{0;n})^k}\frac{f^{k-1}(\xi_{0;n})}{f^{k-2}(\xi_{0;n})}\frac{f^{k-2}(\xi_{0;n})}{f^{k-3}(\xi_{0;n})}\cdots\frac{f^1(\xi_{0;n})}{f^0(\xi_{0;n})}\frac{f^0(\xi_{0;n})}{F(\xi_{0;n})}] \approx \frac{t^k}{k!}$$

e concluimos

$$U_n = nF(X_{(n;1)}) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \approx e^t$$

com

$$P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = P(t \leq x) = P(e^t \leq e^x) = P(U_n \leq e^x)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;1)} - \xi_{0;n}}{a_n}) = \lim_{n\to\infty} P(U_n \leq e^x) = 1 - e^{-e^x}.$$

Corolário 0.19. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição* F *do tipo exponencial. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n} \leq x) = e^{-e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

onde $F(\xi_{1;n}) = 1-\frac{1}{n}$ *e* $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{1;n})}$.

Teorema 0.20. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com função de distribuição* F *com contato terminal de ordem* m *no ponto* $\xi_{1;n}$, $(F(\xi_{1;n}) = 1-\frac{1}{n})$. *Então existe uma sequência de constante* $(a_n)_{n\geq 1}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = e^{-(-t)^{m+1}} \quad se \quad t\leq 0 \quad e \quad 1 \quad se \quad t>0.$$

onde $a_n = [\frac{(-1)^m(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$.

Prova: *Considere o desenvolvimento de Taylor em torno do ponto* $\xi_{1;n}$

$$F(\xi_{1;n}-s) = F(\xi_{1;n}) + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k s^k F^{(k)}}{k!} + \frac{(-1)^{m+1}s^{m+1}F^{(m+1)}(\xi_{1;n}-\theta s)}{(m+1)!} =$$

$$F(\xi_{1;n}) + \frac{(-1)^{m+1}s^{m+1}F^{(m+1)}(\xi_{1;n}-\theta s)}{(m+1)!} \quad 0<\theta<1.$$

Observe que

$$V_n = n[1-F(X_{(n;n)}] = n[1-F(\xi_{1;n})] + n[F(\xi_{1;n})-F(X_{(n;n)}] = n[F(\xi_{1;n})-F(X_{(n;n)})].$$

Fazendo $s = \xi_{1;n} - X_{(n;n)}$, *temos:*

$$V_n = \frac{(-1)^m n}{(m+1)!}(\xi_{1;n}-X_{(n;n)})^{m+1}F^{m+1}(\xi_{1;n})\frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n}+\theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}.$$

Fazendo $a_n = [\frac{(-1)^m(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_{1;n})}]^{\frac{1}{m+1}}$ *e* $W_n = \frac{F^{m+1}((1-\theta)\xi_{1;n}+\theta X_{(n;n)})}{F^{m+1}(\xi_{1;n})}$ *temos*

$$V_n = (\frac{\xi_{1;n}-X_{(n;n)}}{a_n})^{m+1}.W_n = [-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1}.W_n.$$

Como $W_n \to^P 1$, *concluimos, pelo teorema de Slutsky, que a distribuição assintótica de* $[-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})^{m+1}$ *é a mesma de* V_n *e para* $t\leq 0$,

$$P(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = P([-(\frac{X_{(n;n)}-\xi_{1;n}}{a_n})]^{m+1} \geq (-t)^{m+1})$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_{(n;n)} - \xi_{1;n}}{a_n} \leq t) = e^{[-(-t)^{m+1}]}, \quad se \quad t \leq 0 \quad e \quad 1 \quad se \quad t > 0.$$

Exemplo 0.21. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$. Assim $F(x) = \frac{x}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e $F^{(1)}(x) = \frac{1}{\theta}, 0 \leq x \leq \theta$ e portanto F tem contato terminal de ordem $m = 0$ e temos $a_n = \frac{\theta}{n}$ com $\xi_{1;n} = \theta$. Cocluimos

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{n}{\theta}(X_{(n;n)} - \theta) \leq t) = e^t, t \leq 0.$$

E-mail address: bueno@ime.usp.br

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil