MAE 224 - PROBABILIDADE II
Nona Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno
Resolução da lista 9

1) Uma função de distribuição $G(\cdot)$ é estável através do máximo se para todo inteiro positivo k, existem constantes α_k e b_k tais que

$$G_k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Prove que as funções de distribuições

$$W_1^*(x) = e^{-(-x)^\alpha} \text{ se } x \leq 0,\ \alpha > 0$$
$$W_2^*(x) = e^{-x^{-\alpha}} \text{ se } x > 0,\ \alpha > 0$$
$$\wedge^*(x) = e^{-e^x}, \quad -\infty < x < \infty$$

são estáveis através do máximo.

a)

$$\left(e^{-(-\alpha_k x-\beta_k)^\alpha}\right)^k = e^{-(-x)^\alpha} \Leftrightarrow e^{-k(-\alpha_k x-\beta_k)^\alpha} = e^{-(-x)^\alpha} \Leftrightarrow k(-\alpha_k x-\beta_k)^\alpha = (-x)^\alpha$$

$$\Leftrightarrow (-k^{1/\alpha}\alpha_k x-k^{1/\alpha}\beta_k)^\alpha = (-x)^\alpha \Leftrightarrow k^{1/\alpha}\alpha_k x+k^{1/\alpha}\beta_k = x \Leftrightarrow \alpha_k = k^{-1/\alpha} \text{ e } \beta_k = 0.$$

b)

$$\left(e^{-(\alpha_k x+\beta_k)^{-\alpha}}\right)^k = e^{-x^{-\alpha}} \Leftrightarrow e^{-k(\alpha_k x+\beta_k)^{-\alpha}} = e^{-x^{-\alpha}} \Leftrightarrow k(\alpha_k x+\beta_k)^{-\alpha} = x^{-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow (k^{-1/\alpha}\alpha_k x+k^{-1/\alpha}\beta_k)^{-\alpha} = x^{-\alpha} \Leftrightarrow k^{-1/\alpha}\alpha_k x+k^{-1/\alpha}\beta_k = x \Leftrightarrow \alpha_k = k^{1/\alpha} \text{ e } \beta_k = 0.$$

c)

$$\left[e^{-\exp\left[-(\alpha_k x+\beta_k)\right]}\right]^k = e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow e^{-k\exp\left[-(\alpha_k x+\beta_k)\right]} = e^{-e^{-x}} \Leftrightarrow k\exp\left[-\left(\alpha_k x+\beta_k\right)\right] = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(k)}\exp\left[-\left(\alpha_k x+\beta_k\right)\right] = e^{-x} \Leftrightarrow \exp\left(\ln(k) - \alpha_k x - \beta_k\right) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k x + \beta_k - \ln(k) = x \Leftrightarrow \alpha_k = 1 \text{ e } \beta_k = \ln(k).$$

2)
$\exists\ x_0$ tal que $F(x_0) = 0$ e $F(x_0 + \epsilon) > 0\ \forall \epsilon > 0$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ \int_0^x \frac{2y}{\theta^2}dy = \frac{x^2}{\theta^2} \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ se } x > 1 \end{cases},$$

então $x_0 = 0$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(xt+x_0)}{F(t+x_0)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(xt)}{F(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{x^2t^2/\theta^2}{t^2/\theta^2} = x^2,$$

então $\alpha = 2$.

Note que a inversa de $F(\cdot)$ é $F^{-1}(x) = \theta\sqrt{x}$, pois valem

$$F\left(F^{-1}(x)\right) = F\left(\theta\sqrt{x}\right) = \frac{\theta^2 x}{\theta^2} = x$$

e

$$F^{-1}\left(F(x)\right) = F^{-1}\left(\frac{x^2}{\theta^2}\right) = \theta\sqrt{\frac{x^2}{\theta^2}} = x.$$

Assim, $a_n = F^{-1}(1/n) = \theta\sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{\theta}{\sqrt{n}}$ e $b_n = 0$. Portanto

$$\frac{X_{(1:n)} - 0}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{D} 1 - e^{-(x)^2}.$$

Para construir o intervalo assintótico com 90% de confiança para θ temos que encontrar os quantis 5% e 95%. Comecemos com o quantil 5%.

$$1-e^{-(x)^2} = 0,05 \Leftrightarrow 0,95 = e^{-(x)^2} \Leftrightarrow \ln(0,95) = -(x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-\ln(0,95)} = q_{0,05}.$$

$$1-e^{-(x)^2} = 0,95 \Leftrightarrow 0,05 = e^{-(x)^2} \Leftrightarrow \ln(0,05) = -(x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{-\ln(0,05)} = q_{0,95}.$$

Assim

$$P\left(\sqrt{-\ln(0,95)} < \frac{X_{(1:n)} - 0}{\frac{\theta}{\sqrt{n}}} < \sqrt{-\ln(0,05)}\right) = 0,9$$

$$P\left(\sqrt{-\ln(0,95)} < \frac{\sqrt{n}X_{(1:n)}}{\theta} < \sqrt{-\ln(0,05)}\right) = 0,9$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{-\ln(0,05)}} < \frac{\theta}{\sqrt{n}X_{(1:n)}} < \frac{1}{\sqrt{-\ln(0,95)}}\right) = 0,9$$

$$P\left(\frac{\sqrt{n}X_{(1:n)}}{\sqrt{-\ln(0,05)}} < \theta < \frac{\sqrt{n}X_{(1:n)}}{\sqrt{-\ln(0,95)}}\right) = 0,9\ ,$$

logo um IC assintótico com 90% de confiança para θ é dado por

$$IC_{90\%}(\theta) = \left[\frac{\sqrt{n}X_{(1:n)}}{\sqrt{-\ln(0,05)}}; \frac{\sqrt{n}X_{(1:n)}}{\sqrt{-\ln(0,95)}}\right].$$

3)

$\xi_{0,5}$ é a mediana da distribuição e seu estimador, $\hat{\xi}_{0,5}$, é dado por $X_{n:k}$, em que $k = \lfloor n/2 \rfloor$ é o piso de $n/2$ e $X_{n:k}$ é o $k-$ésimo número considerando a ordem crescente. Primeiro encontaremos a mediana populacional,

$$F(\xi_{0,5}) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-(\lambda \xi_{0,5})^2} = 0,5 \Leftrightarrow 0,5 = e^{-(\lambda \xi_{0,5})^2} \Leftrightarrow -\ln(0,5) = (\lambda \xi_{0,5})^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-\ln(0,5)} = \lambda \xi_{0,5} \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)} = \xi_{0,5}.$$

Agora precisamos obter $f\left(\xi_{0,5}\right)$. Note que

$$f(x) = F'(x) = \left[1 - e^{-(\lambda x)^2}\right]' = 2\lambda^2 x e^{-(\lambda x)^2}$$

e

$$f(\xi_{0,5}) = f\left(\frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)}\right) = 2\lambda^2 \frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)} e^{-\left(\lambda \frac{1}{\lambda}\sqrt{-\ln(0,5)}\right)^2} = 2\lambda\sqrt{\ln(2)} e^{-\left(\sqrt{-\ln(0,5)}\right)^2}$$

$$= 2\lambda\sqrt{\ln(2)} e^{\ln(0,5)} = 2\lambda\sqrt{\ln(2)}0,5 = \lambda\sqrt{\ln(2)}.$$

Agora faremos um intervalo de confiança assintótico para λ usando o seguinte resultado

$$\sqrt{n}\left(X_{n:k} - \xi_p\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{p(1-p)}{\left[f\left(\xi_p\right)\right]^2}\right).$$

Para montar o intervalo de confiança utilizaremos a mediana, $\xi_{1/2} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)}$, o que nos dá $f\left(\xi_{1/2}\right) = \lambda\sqrt{\ln(2)}$ e neste caso

$$\frac{p(1-p)}{\left[f\left(\xi_p\right)\right]^2} = \frac{1/4}{\lambda^2 \ln(2)} = \frac{1}{4\lambda^2 \ln(2)},$$

portanto, assintoticamente,

$$P\left(Z_{0,025} < \frac{\sqrt{n}\left(X_{n:k} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4\lambda^2 \ln(2)}}} < Z_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(Z_{0,025} < 2\sqrt{n}\lambda\sqrt{\ln(2)}\left(X_{n:k} - \frac{1}{\lambda}\sqrt{\ln(2)}\right) < Z_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(Z_{0,025} < 2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}\left(\lambda X_{n:k} - \sqrt{\ln(2)}\right) < Z_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{Z_{0,025}}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}} < \lambda X_{n:k} - \sqrt{\ln(2)} < \frac{Z_{0,975}}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{\sqrt{\ln(2)}}{X_{n:k}}+\frac{Z_{0,025}}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}X_{n:k}}<\lambda<\frac{\sqrt{\ln(2)}}{X_{n:k}}+\frac{Z_{0,975}}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}X_{n:k}}\right)=0,95\,,$$

em que $Z_{0,025}=-1,96$ e $Z_{0,975}=1,96$.

Logo um intervalo assintótico com 95% de confiança para λ é dado por

$$IC_{95\%}(\lambda)=\left[\frac{\sqrt{\ln(2)}}{X_{n:k}}+\frac{-1,96}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}X_{n:k}};\frac{\sqrt{\ln(2)}}{X_{n:k}}+\frac{1,96}{2\sqrt{n}\sqrt{\ln(2)}X_{n:k}}\right].$$

4)

a) $F\left(\xi_0\right)=0$ se $\xi_0=0$ e

$$F'\left(\xi_0\right)=\left.\frac{4x}{\theta^2}\right|_{x=0}=0,$$

$$F''\left(\xi_0\right)=\left.\frac{4}{\theta^2}\right|_{x=0}\neq 0.$$

Assim $F(\cdot)$ tem ponto terminal de ordem 1 em $\xi_0=0$.

b) Precisamos encontrar a_n e b_n. $b_n=0$ e

$$a_n=\left[\frac{(m+1)!}{nF^{(m+1)}\left(\xi_0\right)}\right]^{\frac{1}{m+1}}=\left[\frac{(1+1)!}{nF^{(1+1)}\left(0\right)}\right]^{\frac{1}{1+1}}=\left[\frac{2}{n4/\theta^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\theta^2}{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{\theta}{\sqrt{2n}}.$$

c) Assintoticamente,

$$P\left(X_{(n:1)}>150\right)=1-P\left(X_{(n:1)}\leq 150\right)=1-P\left(\frac{X_{(n:1)}-0}{\frac{\theta}{\sqrt{2n}}}\leq\frac{150-0}{\frac{\theta}{\sqrt{2n}}}\right)$$

$$=1-\left(1-e^{-2\frac{150\sqrt{2n}}{\theta}}\right)=\exp\left(-2\frac{150\sqrt{2n}}{\theta}\right)$$

mas $\theta=10000$ e $n=100$, portanto temos

$$=\exp\left(-2\frac{150\sqrt{200}}{10000}\right)=\exp\left(-\frac{300\sqrt{200}}{10000}\right)=\exp\left(-\frac{3\sqrt{200}}{100}\right)=\exp\left(-\frac{3\sqrt{2}}{10}\right)=0,6542.$$

5)

a) $X_i\overset{iid}{\sim}Laplace(0,1/\lambda)$.

Se $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2\lambda} e^{-|t|/\lambda} dt = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^{x} e^{t/\lambda} dt = \frac{1}{2\lambda}\, \lambda e^{t/\lambda}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{e^{x/\lambda}}{2}.$$

Note que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}}{\frac{e^{x/\lambda}}{2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}}}{e^{x/\lambda}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Quando x é negativo podemos escrever $f'(\cdot)$ como

$$f'(x) = \frac{1}{2\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}}$$

e portanto

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2\lambda^2} e^{\frac{x}{\lambda}}}{\frac{1}{2\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Continuando este processo vemos que

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f(x)}{F(x)} \simeq \frac{f'(x)}{f(x)} \simeq \frac{f''(x)}{f'(x)} \simeq \dots$$

quando $x \to -\infty$.

b)

$$F(\xi_{0,n}) = \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{e^{\xi_{0,n}/\lambda}}{2} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow e^{\xi_{0,n}/\lambda} = \frac{2}{n} \Leftrightarrow \xi_{0,n} = \lambda \ln\left(\frac{2}{n}\right) = b_n.$$

$$f(\xi_{0,n}) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\left|\lambda \ln\left(\frac{2}{n}\right)\right| / \lambda\right) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\left|\ln\left(\frac{2}{n}\right)\right|\right)$$
$$= \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\left|-\ln\left(\frac{n}{2}\right)\right|\right) = \frac{1}{2\lambda} \exp\left(-\ln\left(\frac{n}{2}\right)\right) = \frac{1}{2\lambda}\frac{2}{n} = \frac{1}{n\lambda},$$

assim

$$a_n = \frac{1}{n f(\xi_{0,n})} = \frac{1}{n\frac{1}{n\lambda}} = \lambda.$$

c)

$$1 - \exp\left(-e^{\xi_{0,95}}\right) = 0,95 \Leftrightarrow 0,05 = \exp\left(-e^{\xi_{0,95}}\right) \Leftrightarrow -\ln(0,05) = e^{\xi_{0,95}}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln(0,05)\right) = \xi_{0,95}.$$

$$1 - \exp\left(-e^{\xi_{0,05}}\right) = 0,05 \Leftrightarrow 0,95 = \exp\left(-e^{\xi_{0,05}}\right) \Leftrightarrow -\ln(0,95) = e^{\xi_{0,05}}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(-\ln(0,95)\right) = \xi_{0,05}.$$

Assintoticamente,

$$P\left(\ln\left(-\ln(0,95)\right) < \frac{X_{n:1}-b_n}{a_n} < \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right) = 0,90$$

$$P\left(\ln\left(-\ln(0,95)\right) < \frac{X_{n:1}-\lambda\ln\left(\frac{2}{n}\right)}{\lambda} < \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right) = 0,90$$

$$P\left(\ln\left(-\ln(0,95)\right) < \frac{X_{n:1}}{\lambda} - \ln\left(\frac{2}{n}\right) < \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right) = 0,90$$

$$P\left(\ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,95)\right) < \frac{X_{n:1}}{\lambda} < \ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right) = 0,90$$

$$P\left(X_{n:1}\left[\ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right]^{-1} < \lambda < X_{n:1}\left[\ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,95)\right)\right]^{-1}\right) = 0,90.$$

Logo um intervalo assintótico com 90% de confiança para λ é dado por

$$IC_{90\%}(\lambda) = \left[X_{n:1}\left[\ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,05)\right)\right]^{-1}; X_{n:1}\left[\ln\left(\frac{2}{n}\right) + \ln\left(-\ln(0,95)\right)\right]^{-1}\right].$$

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil