MAE 224 - PROBABILIDADE II
Sexta Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) A função de distribuição G é estável através do máximo se para todo inteiro positivo k, existem constantes α_k e β_k tais que

$$G^k(\alpha_k x + \beta_k) = G(x), \forall x \in R.$$

Prove que as funções de distribuições

$$W_1^*(x) = \exp[-(-x)^\alpha], \quad x \leq 0, \quad \alpha > 0;$$

$$W_2^*(x) = \exp[-x^{-\alpha}], \quad x \geq 0, \quad \alpha > 0;$$

$$\Lambda^*(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty.$$

são estáveis através do máximo.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade :

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{(0,\theta)}(x)$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro.

a) Considere sequências $(a_n)_{n\geq 1}$ e $(b_n)_{n\geq 1}$ definidas por $a_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$ e $b_n = 0$ e mostre que a função de distribuição de X pertence ao dominio de atração minimal da distribuição de Weibull $W_1(x) = 1 - \exp[-(x)^\alpha], x \geq 0$ para algum $\alpha > 0$.

b) Baseado no limite em distribuição de $X_{1:n}$, padronizada, construa um intervalo de confiança para o parâmetro θ com coeficiente de confiança de $0,9$.

3) Seja $X_1, X_2, ..., X_{100}$ uma amostra aleatória de tamanho 100 da distribuição de Weibull $F(x) = 1 - \exp[-(\lambda x)^2], x \geq 0$ para algum parâmetro $\lambda > 0$ e seja ξ_M a mediana de F.

Baseado na mediana amostral $\widehat{\xi_M}$, encontre um intervalo de confiança com $0,95$ de confiança para λ.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função de distribuição triangular em $[0, \theta]$, isto é

$$F(x) = \frac{2x^2}{\theta^2} \quad se \quad 0 \leq x < \frac{\theta}{2};$$

$$F(x) = \frac{4x}{\theta} - \frac{2x^2}{\theta^2} - 1 \quad se \quad \frac{\theta}{2} \leq x < \theta.$$

a) Prove que a distribuição tem contato terminal de ordem m em ξ_0 . Quais os valores de ξ_0 e m?

(Uma distribuição tem contato terminal de ordem m no ponto ξ_0 se $F(\xi_0) = 0$ e $F^{(j)}(\xi_0) = 0$ para $1 \leq j \leq m$ e $F^{(m+1)}(\xi_0) \neq 0$). Neste caso sabemos que

$$P(\frac{X_{n:1} - b_n}{a_n} \leq t) \to 1 - e^{-t(m+1)}, t \geq 0$$

onde $a_n = [\frac{(m+1)!}{nF^{(m+1)}(\xi_0)}]^{\frac{1}{(m+1)}}$ e $b_n = \xi_0$.

b) Calcule a_n e b_n.

c) Considere $\theta = 10000$ horas e um sistema em série com 100 desses componentes. Qual uma estimativa da probabilidade do sistema sobreviver 150 horas?

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função

densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, \quad -\infty < x < \infty$$

a) Verifique se esta densidade é da classe exponencial, isto é

$$\frac{f(x)}{F(x)} \simeq \frac{f'(x)}{f(x)} \simeq \frac{f''(x)}{f'(x)} \simeq ...$$

quando $x \to -\infty$.

b) Sabemos que

$$P(\frac{X_{n:1} - b_n}{a_n} \leq t) \to 1 - e^{-e^x}$$

em distribuição para $-\infty < x < \infty$ e onde $F(\xi_{0,n}) = \frac{1}{n}$, $a_n = \frac{1}{nf(\xi_{0,n})}$ e $b_n = \xi_{0,n}$. Calcule a_n e b_n.

c) Usando a aproximação em b) construir um intervalo de confiança para λ com coeficiente de confiança igual a 0,9.