

## MAE 224 - PROBABILIDADE II

### Décima Lista de Exercícios

Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Verifique que a função de distribuição  $W_2(x) = 1 - \exp[-(-x)^{-\alpha}]$  para  $x \leq 0$  e  $\alpha > 0$  é estável através do mínimo. Verifique que os  $\alpha_k$  correspondentes são maiores do que 1 para  $k > 1$ .

2) Conhecemos que a função de distribuição pertence ao domínio de atração minimal de  $W_1(x) = 1 - \exp[-x\alpha]$  para  $x > 0$  e  $\alpha > 0$  se, e somente se,

a) Existe  $x_0$  tal que  $F(x_0) = 0$  e  $F(x_0 + \varepsilon) > 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ ;

b)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{F(xt + x_0)}{F(t + x_0)} \right] = x^\alpha, x > 0$$

para  $\alpha > 0$ . Prove que a distribuição gama de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  pertence ao domínio de atração minimal de  $W_1(x)$ .

3) Prove que a função de distribuição

$$F(x) = \exp\left[-\frac{(1-x)}{x}\right], 0 \leq x \leq 1$$

pertence ao domínio de atração de  $\Lambda(x) = 1 - \exp[-\exp(x)]$ .

4) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição exponencial de parâmetro  $\lambda > 0$ .

a) considere as sequências  $a_n = \frac{1}{n\lambda}$  e  $b_n = \frac{1}{\lambda}$ . Qual o limite em distribuição de  $\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n}$ .

b) Dê um intervalo de confiança, ao nível de 0,9 de confiança para o parâmetro  $\lambda$ .

5) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição logística

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp[-x]}, \quad -\infty < x < \infty.$$

a) Prove que  $F$  é do tipo exponencial.

b) Encontre as sequências  $(a_n)_{n \geq 1}$  e  $(b_n)_{n \geq 1}$  e a distribuição assintótica  $\frac{X_{(n;1)} - b_n}{a_n}$ .

6) 5) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição

$$F(x) = 1 - (1 - x)^3, \quad 0 < x < 1.$$

a) Prove que a distribuição  $F$  tem contato terminal de ordem  $m$  no ponto  $\xi_1 = 1$ . Qual o valor de  $m$ ?

b) Encontre a sequência de constantes  $a_n$ ,  $b_n = \xi_1$ , e a distribuição assintótica  $\frac{X_{(n;n)} - \xi_1}{a_n}$ .