MAE 224 - PROBABILIDADE II
Sétima Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno
Resolução da lista 7

1)$X_n \overset{iid}{\sim} Laplace(0, \lambda)$.

Para calcular os percentis precisamos primeiro encontrar a função de distribuição acumulada. Se $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt = \frac{\lambda}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} dt + \int_{0}^{x} e^{-\lambda t} dt\right] = \frac{\lambda}{2}\left[\left.\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_{0}^{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2 - e^{-\lambda x}\right] = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2}.$$

Se $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} dt = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda t} dt = \frac{\lambda}{2}\left.\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\right|_{-\infty}^{x} = \frac{e^{\lambda x}}{2}.$$

Agora é necessário inverter a função de distribuição. Se $p \geq 1/2$ usaremos $F(x) = 1 - \frac{e^{-\lambda x}}{2}$ e se $p < 1/2$ utilizaremos $F(x) = \frac{e^{\lambda x}}{2}$. Primeiro caso:

$$F(\xi_p) = p \Leftrightarrow 1 - \frac{e^{-\lambda \xi_p}}{2} = p \Leftrightarrow e^{-\lambda \xi_p} = 2(1-p) \Leftrightarrow \xi_p = -\frac{\ln(2(1-p))}{\lambda}.$$

Segundo caso:

$$F(\xi_p) = p \Leftrightarrow \frac{e^{\lambda \xi_p}}{2} = p \Leftrightarrow e^{\lambda \xi_p} = 2p \Leftrightarrow \xi_p = \frac{ln(2p)}{\lambda}$$

Então o percentil 75%, $\xi_{0,75}$ é dado por

$$\xi_{0,75} = -\frac{\ln(2(1-3/4))}{\lambda} = -\frac{\ln(1/2)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

e

$$f(\xi_{0,75}) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \frac{\ln(2)}{\lambda}} = \frac{\lambda}{2} e^{-\ln(2)} = \frac{\lambda}{2} e^{\ln(1/2)} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4}.$$

Agora faremos um intervalo de confiança assintótico para λ usando o seguinte resultado

$$\sqrt{n}\left(X_{n:k} - \xi_p\right) \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{p(1-p)}{\left[f(\xi_p)\right]^2}\right),$$

em que $k = \lfloor np \rfloor$ é o piso de np e $X_{n:k}$ é o $k-$ésimo número considerando a ordem crescente. Para montar o intervalo de confiança utilizaremos a mediana, $\xi_{1/2} = 0$, o que nos dá $f\left(\xi_{1/2}\right) = \frac{\lambda}{2}$ e neste caso

$$\frac{p(1-p)}{\left[f\left(\xi_p\right)\right]^2} = \frac{1/4}{\lambda^2/4} = \frac{1}{\lambda^2},$$

portanto, assintoticamente,

$$P\left(\frac{1}{\lambda}Z_{0,025} < \sqrt{n}\left(X_{n:k} - 0\right) < \frac{1}{\lambda}Z_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}\lambda}Z_{0,025} < X_{n:k} < \frac{1}{\sqrt{n}\lambda}Z_{0,975}\right) = 0,95$$

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}X_{n:k}}Z_{0,025} < \lambda < \frac{1}{\sqrt{n}X_{n:k}}Z_{0,975}\right) = 0,95.$$

Logo um intervalo com 95% de confiança para λ é dado por

$$IC_{95\%}(\lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{n}X_{n:k}}Z_{0,025}; \frac{1}{\sqrt{n}X_{n:k}}Z_{0,975}\right].$$

2) Continuando, a mediana é dada por $\xi_M = 0$. Queremos testar $H_0 : \lambda = 1$ contra $H_1 : \lambda \neq 1$ ao nível de 5% de significância.

Vemos que neste caso $n = 21$ e a mediana amostral, $X_{n:k}$, é 11. Usando o intervalo assintótico obtido anteriormente para λ, temos que

$$IC_{95\%}(\lambda) = \left[\frac{1}{\sqrt{21}\cdot 11}Z_{0,025}; \frac{1}{\sqrt{21}\cdot 11}Z_{0,975}\right] = \left[-0,03; 0,03\right],$$

como o valor 1 não pertence ao intervalo de 95% de confiança então rejeitamos $H_0 : \lambda = 1$ ao nível de 5% de significância.

3) $X_n \overset{ind}{\sim} Laplace(0, n\lambda)$.

Antes de calcularmos as quantidades necessárias para o cálculo do limite precisaremos de alguns momentos de X_n.

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2\lambda n} e^{-\frac{|x|}{\lambda n}} dx = \frac{1}{2\lambda n}\left[\int_{-\infty}^{0} x e^{\frac{x}{\lambda n}} dx + \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda n}} dx\right]$$

fazendo a substituição de variável $y = -x$, $dy = -dx$ na primeira integral dentro dos colchetes temos

$$= \frac{1}{2\lambda n}\left[-\int_{0}^{\infty} y e^{-\frac{y}{\lambda n}} dy + \int_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x}{\lambda n}} dx\right] = 0.$$

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2\lambda n} e^{-\frac{|x|}{\lambda n}} dx = \frac{2}{2\lambda n} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{|x|}{\lambda n}} dx = \frac{1}{\lambda n} \int_0^{\infty} x^{3-1} e^{-\frac{x}{\lambda n}} dx,$$

a primeira igualdade decorre do fato do integrando ser uma função par. A última integral é o núcleo de uma *Gama* $\left(3, \frac{1}{\lambda n}\right)$ e portanto

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \frac{1}{\lambda n} \frac{\Gamma(3)}{\left(\frac{1}{\lambda n}\right)^3} = 2\lambda^2 n^2.$$

Consequentemente,

$$\mathrm{Var}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left[X_n^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X_n\right]\right)^2 = 2\lambda^2 n^2 - 0^2 = 2\lambda^2 n^2.$$

Falta calcular $\mathbb{E}\left[|X_n - \mu_n|^3\right]$.

$$\mathbb{E}\left[|X_n - \mu_n|^3\right] = \mathbb{E}\left[|X_n|^3\right] = \frac{1}{2\lambda n} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 e^{-\frac{|x|}{\lambda n}} dx = \frac{2}{2\lambda n} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x}{\lambda n}} dx,$$

pois trata-se de uma função par.

$$= \frac{1}{\lambda n} \int_0^{\infty} x^{4-1} e^{-\frac{x}{\lambda n}} dx,$$

esta integral é o núcleo de uma *Gama* $\left(4, \frac{1}{\lambda n}\right)$ e portanto

$$\mathbb{E}\left[|X_n - \mu_n|^3\right] = \frac{1}{\lambda n} \frac{\Gamma(4)}{\left(\frac{1}{\lambda n}\right)^4} = 3!\lambda^3 n^3 = 6\lambda^3 n^3.$$

Vamos calcular o numerador e o denominador do limite. O númerador é dado por

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|X_k - \mu_k|^3\right] = \sum_{k=1}^{n} 6\lambda^3 k^3 = 6\lambda^3 \sum_{k=1}^{n} k^3 = 6\lambda^3 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

pois $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} 2\lambda^2 k^2 = 2\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\lambda^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lambda^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{3},$$

pois $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Assim

$$s_n^3 = \left(s_n^2\right)^{3/2} = \left(\lambda^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\right)^{3/2} = \lambda^3 \frac{n^{3/2}(n+1)^{3/2}(2n+1)^{3/2}}{3^{3/2}}.$$

O nosso limite é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6\lambda^3 \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{\lambda^3 \frac{n^{3/2}(n+1)^{3/2}(2n+1)^{3/2}}{3^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{5/2}}{2} \frac{(n(n+1))^{1/2}}{(2n+1)^{3/2}} = \frac{3^{5/2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}(n+1)^{1/2}}{(2n+1)^{3/2}}$$

$$= \frac{3^{5/2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{1^{1/2}(1+1/n)^{1/2}}{n^{1/2}(2+1/n)^{3/2}} = \frac{3^{5/2}}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(1+1/n)^{1/2}}{(2+1/n)^{3/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{3^{5/2}}{2} \frac{1}{2^{3/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{5/2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = 0.$$

A consequência deste fato é que vale o Teorema do Limite Central de Luapunov e assim temos

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k\right]}{\sqrt{s_n^2}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

4)

$$P\left(X_n = n^\alpha\right) = P\left(X_n = n^{-\alpha}\right) = \frac{1}{6n^{2(\alpha-1)}}$$

e

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{6n^{2(\alpha-1)}}.$$

Assim

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0 \cdot P(X_n = 0) + n^\alpha \cdot P\left(X_n = n^\alpha\right) - n^\alpha \cdot P\left(X_n = -n^\alpha\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = 0^2 \cdot P(X_n = 0) + n^{2\alpha} \cdot P\left(X_n = n^\alpha\right) + n^{2\alpha} \cdot P\left(X_n = -n^\alpha\right) = \frac{2n^{2\alpha}}{6n^{2(\alpha-1)}}$$

e

$$\operatorname{Var}\left(X_n\right) = \mathbb{E}\left[X_n^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[X_n\right]\right)^2 = \frac{2n^{2\alpha}}{6n^{2(\alpha-1)}} - 0^2 = \frac{n^2}{3}.$$

Note que

$$\mathbb{E}\left[|X_n|^3\right] = 0^3 \cdot P(X_n = 0) + n^{3\alpha} \cdot P\left(X_n = n^\alpha\right) + n^{3\alpha} \cdot P\left(X_n = -n^\alpha\right) = \frac{2n^{3\alpha}}{6n^{2(\alpha-1)}} = \frac{n^{2+\alpha}}{3}.$$

Agora precisamos calcular o numerador e o denominador do limite. Comecemos com o numerador.

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[|X_k|^3\right] = \sum_{k=1}^n \frac{k^{2+\alpha}}{3} = \frac{k^\alpha}{3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{k^\alpha}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = k^\alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}.$$

Agora o denominador

$$s_n^2 = \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3} = \frac{1}{3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

assim,

$$s_n^3 = \left(\frac{1}{3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^{3/2} = \frac{n^{3/2}(n+1)^{3/2}(2n+1)^{3/2}}{18^{3/2}}.$$

O limite é dado por

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^\alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}}{\frac{n^{3/2}(n+1)^{3/2}(2n+1)^{3/2}}{18^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k^\alpha 18^{1/2} n(n+1)(2n+1)}{n^{3/2}(n+1)^{3/2}(2n+1)^{3/2}}$$

$$= k^\alpha 18^{1/2} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}} = 0.$$

Quanto a restrição sob α é necessário que $\alpha \geq 1$ que X_n seja uma legítima V.A., suponha que $\alpha = 0$ então

$$P(X_{10} = 10^\alpha) = \frac{10^2}{6} > 1,$$

logo isto não é uma probabilidade. Demonstração deste fato, $\alpha < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = n^\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2(1-\alpha)}}{6} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} n^{2(1-\alpha)} = \infty,$$

pois $1 - \alpha > 0$.

5) Temos a sequência $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \ldots$, com $X_i \overset{iid}{\sim} U(0,1)$ e $Y_i \overset{iid}{\sim} U(0,2)$.

Note que

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = \frac{1}{2} \text{ e } \mathbb{E}\left[Y_i\right] = 1$$

e

$$\text{Var}\left(X_i\right) = \frac{1}{12} \text{ e } \text{Var}\left(Y_i\right) = \frac{1}{3}.$$

Como X_i e Y_i são variáveis uniformes então $X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right] \overset{iid}{\sim} U(-1/2, 1/2)$ e $Y_i - \mathbb{E}\left[Y_i\right] \overset{iid}{\sim} U(-1,1)$. Perceba ainda que

$$\left|X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]\right| \overset{iid}{\sim} U(0, 1/2)$$

e

$$\left|Y_i - \mathbb{E}\left[Y_i\right]\right| \overset{iid}{\sim} U(0,1),$$

portanto

$$\mathbb{E}\left[\left|X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]\right|^3\right] = \mathbb{E}\left[W^3\right],\ W \sim U(0, 1/2)$$

$$\mathbb{E}\left[\left|X_i - \mathbb{E}\left[X_i\right]\right|^3\right] = \int_0^{\frac{1}{2}} 2w^3 dw = 2\left.\frac{w^4}{4}\right|_0^{1/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

e

$$\mathbb{E}\left[|Y_i - \mathbb{E}[Y_i]|^3\right] = \mathbb{E}\left[Z^3\right],\ Z \sim U(0,1)$$

$$\mathbb{E}\left[|Y_i - \mathbb{E}[Y_i]|^3\right] = \int_0^1 z^3 dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Seja $S_{2n} = X_1 + Y_1 + \ldots + X_n + Y_n$ e $S_{2n-1} = S_{2n} - Y_n$.

$$\mathrm{Var}\left(S_{2n}\right) \overset{ind}{=} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(X_k\right) + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(Y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{12} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} = \frac{n}{12} + \frac{n}{3} = \frac{5n}{12}$$

e

$$\mathrm{Var}\left(S_{2n-1}\right) = \mathrm{Var}\left(S_{2n}\right) - \mathrm{Var}\left(Y_n\right) = \frac{5n}{12} - \frac{1}{3} = \frac{5n-4}{12}.$$

$$s_{2n}^3 = \left(\mathrm{Var}\left(S_{2n}\right)\right)^{3/2} \text{ e } s_{2n-1}^3 = \left(\mathrm{Var}\left(S_{2n-1}\right)\right)^{3/2}.$$

Como $\mathrm{Var}\left(X_i\right) < \infty$ e $\mathrm{Var}\left(Y_i\right) < \infty$ então para provar que o Teorema do Limite Central de Luapunov vale basta mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{32} + \frac{n}{4}}{\left(\frac{5n}{12}\right)^{3/2}} = 0 \tag{1}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{32} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4}}{\left(\frac{5n-4}{12}\right)^{3/2}} = 0. \tag{2}$$

Primeiro mostraremos (1).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{32} + \frac{n}{4}}{\left(\frac{5n}{12}\right)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9n}{32}}{\left(\frac{5n}{12}\right)^{3/2}} = \frac{9 \cdot 12^{3/2}}{32} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5^{3/2} n^{3/2}} = \frac{9 \cdot 12^{3/2}}{32 \cdot 5^{3/2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Agora mostraremos (2).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{32} + \frac{n}{4} - \frac{1}{4}}{\left(\frac{5n-4}{12}\right)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9n-8}{32}}{\left(\frac{5n-4}{12}\right)^{3/2}} = \frac{12^{3/2}}{32} \lim_{n\to\infty} \frac{9n-8}{(5n-4)^{3/2}}$$

$$= \frac{12^{3/2}}{32} \lim_{n\to\infty} \frac{9 - 8/n}{\sqrt{n}\,(5 - 4/n)^{3/2}} = \frac{12^{3/2}}{32} \frac{\lim_{n\to\infty} 9 - 8/n}{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \lim_{n\to\infty} (5 - 4/n)^{3/2}} = \frac{12^{3/2}}{32} \frac{9}{\infty \cdot 5^{3/2}} = 0$$

então S_n satisfaz o Teorema do Limite Central de Luapunov.

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil