MAE 224 - PROBABILIDADE II
Sétima Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas a X que tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

a) Qual o 0,75 quantil (ξ_p) de X? Calcule $f(\xi_p)$.

b) Sabe-se que

$$\sqrt{n}(X_{n:k} - \xi_p) \to N(0, \frac{p(1-p)}{f(\xi_p)^2})$$

em distribuição quando $n \to \infty$, $k = [np]$.

Usando este resultado construir um intervalo de confiança, com coeficiente de confiança de 0,95, para o parâmetro λ.

2) No exercício anterior, qual a mediana ξ_M de X? Usando o mesmo resultado assintótico para a mediana, voce rejeitaria a hipótese de $\lambda = 1$ contra a alternativa $\lambda \neq 1$ ao nível de $0,05$ de significância baseado em uma amostra aleatória de tamanho 21, a saber

$$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21.$$

3)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Considere que X_n tenha função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda n} e^{\frac{-|x|}{n\lambda}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Prove que

$$\frac{1}{s_n^3}\Sigma_{k=1}^{n}E[|X_k-\mu_k|^3]\to 0,$$

quando $n\to\infty$. Qual a consequência de tal resultado?

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com

$$P(X_n=\pm n^{\alpha})=\frac{1}{6n^{2\alpha-2}}=\frac{1}{2}(1-P(X_n=0).$$

Para que valores de α as condições de Luapunov

$$\frac{1}{s_n^{2+1}}\Sigma_{k=1}^{n}E[|X_k|^3]\to 0,$$

quando $n\to\infty$, estão satisfeitas?

5) Seja $X_1, Y_1, X_3, Y_4, ...$ sequência de variáveis aleatórias independentes e tais que X_k tem distribuição uniforme no intervalo $(,1)$ e Y_k tem distribuição uniforme no intervalo $(0,2)$. Conisidere a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ definida por

$$S_1=X_1;$$
$$S_2=X_1+Y_1;$$
$$S_3=X_1+Y_1+X_2;$$

...

$$S_{2n-1}=X_1+...+X_n;$$
$$S_{2n}=X_1+...+Y_n;..$$

Use o critério de Luapunov para provar que S_n satisfaz o Teorema do Limite Central.