# PROBABILIDADE II

VANDERLEI DA COSTA BUENO

0.1. **Estatísticas de Ordem e Distribuições dos Valores Extremos.** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $F$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. A cada realização $w \in \Omega$, ordenamos $X_1(w), X_2(w), ..., X_n(w)$ e denotamos por $X_{(n;1)} \leq X_{(n;2)} \leq .... \leq X_{(n;n)}$. $X_{(n;k)}$ é denominada $k$-ésima estatística de ordem dos $X_1, X_2, ..., X_n$. Em particular denotamos:

$$X_{(n;1)} = \min\{X_1, X_2, ..., X_n\}$$
$$X_{(n;n)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

Assumiremos que $F$ é contínua e portanto $P(X_i = X_j) = 0, \forall i, j$ e concluímos que $X_{(n;1)} < X_{(n;2)} < .... < X_{(n;n)}$.

**Teorema 0.1.** *Sob as hipóteses acima, a função densidade de probabilidade (conjunta) de $X_{(n;k)}$, ( $X_{(n;i)}, X_{(n;j)}$ e de $X_{(n;1)}, X_{(n;2)}, ..., X_{(n;n)}$ ) são respectivamente*

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-F(x))^{n-k}F(x)^{k-1}f(x);$$

$$f_{X_{(n;i)},X_{(n;j)}}(x,y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}F(x)^{i-1}[F(y)-F(x)]^{j-i-1}.$$
$$[1-F(y)]^{n-j}f(x)f(y) \quad se \quad x<y;$$

$$f_{X_{(n;1)},X_{(n;2)},...,X_{(n;n)}}(x_1,x_2,...,x_n) = n!f(x_1)f(x_2)....f(x_n) \quad se \quad x_1 < x_2 < ... < x_n.$$

*Proof.*

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \lim_{dx \downarrow 0} \frac{F_{X_{(n;k)}}(x+dx) - F_{X_{(n;k)}}(x)}{dx} = \lim_{dx \downarrow 0} \frac{P(x < X_{(n;k)} \leq x+dx)}{dx} =$$

$$\lim_{dx \downarrow 0} \frac{P((k-1) \quad dos \quad X_i's \in (-\infty, x], \quad um \quad X_i \in (x, x+dx],}{dx}$$
$$\frac{P((n-k) \quad dos \quad X_i's \in (x+dx, \infty))}{dx} =$$

$$\lim_{dx\downarrow 0}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{F(x)^{k-1}[F(x+dx)-F(x)][1-F(x+dx)]^{n-k}}{dx}.$$

Como $\lim_{dx\downarrow 0} 1-F(x+dx) = 1-F(x)$ e $\lim_{dx\downarrow 0}\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = f(x)$ concluimos que

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(1-F(x))^{n-k}F(x)^{k-1}f(x).$$

A parte restante da prova segue com argumentos análogos.

□

Uma prova alternativa da demonstração acima que tem interesse em si, segue na observação abaixo.

*Observação* 0.2. Considere a função beta definida por

$$B_{n,k}(u) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^u t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}\int_0^u (1-t)^{n-k}dt^k, 0<u<1.$$

Integrando por partes, temos:

$$B_{n,k}(u) = \binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}|_0^u + \binom{n}{k}\int_0^u (n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}dt =$$

$$\binom{n}{k}u^k(1-u)^{n-k} + \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\int_0^u t^k(1-t)^{n-k-1}dt.$$

Repetindo tal processo $(n-k-1)$ vezes obtemos

$$B_{n,k}(u) = \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}u^r(1-u)^{n-r}.$$

Consequentemente

$$P(X_{(n;k)} \leq x) = P(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i\leq x\}} \geq k) = \sum_{r=k}^{n}\binom{n}{r}F(x)^r(1-F(x))^{n-r} =$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\int_0^{F(x)} t^{k-1}(1-t)^{n-k}dt.$$

Se $F$ é absolutamente contínua,

$$f_{X_{(n;k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}F(x)^{k-1}(1-F(x))^{n-k}f(x).$$

0.2. **Funções das Estatísticas de Ordem.** A média amostral da estatísticas de ordem $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_{(n;k)}}{n}$ é identicamente distribuida à média amostral dos $X_i's$, $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$.

A mediana é definida por

$$Md = \begin{cases} X_{(n:\frac{n+1}{2})}, n = 2k+1 & : \\ \frac{X_{(n:\frac{n}{2})}+X_{(n:\frac{n+1}{2})}}{2}, n = 2k & : \end{cases}$$

A amplitude $R$ é definida por $R = X_{(n;n)} - X_{(n;1)}$.

A amplitude média $T$ é definida por $\frac{X_{(n;n)}+X_{(n;1)}}{2}$.

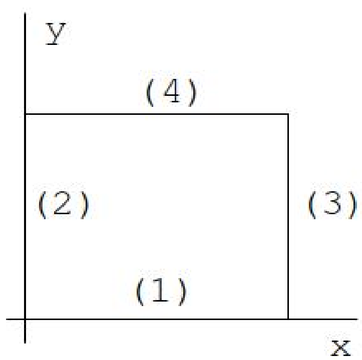
**Exemplo 0.3.** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. A função de densidade conjunta de $X_{(n;1)}, X_{(n;n)}$ é

$$f_{X_{(n;1)},X_{(n;n)}}(x,y) = n(n-1)[F(y)-F(x)]^{n-2} f(x)f(y), \;\; 0 < x < y < 1, \;\; e \;\; 0 c.c.$$

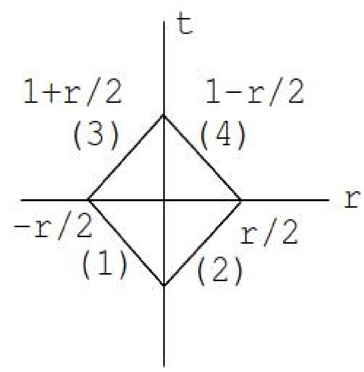
Nosso objetivo é encontrar a fução densidade de probabilidade da amplitude $R$. Como variável auxiliar tomaremos a amplitude média $T$.

Assim $r = y - x$ e $t = \frac{x+y}{2}$,e $x = t - \frac{r}{2}$ e $y = t + \frac{r}{2}$ definem a transformação bijetora com Jacobiano

$$J = \frac{\delta x}{\delta r}\frac{\delta y}{\delta t} - \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta y}{\delta r} = \frac{-1}{2} + \frac{-1}{2} = -1.$$




1




2

O valor absoluto do Jacobiano , $|J| = 1$, é 1. Se consideramos $n = 10$

$$f_{R,T}(r,t) = 10.9.[t + \frac{r}{2} - t + \frac{r}{2}]^8.1.1 = 90r^8 1_D(r,t)$$

onde D é a região de definição obtida através das regiões fechadas

$$0 < x < 1, y = 0 \Rightarrow 0 \leq t - \frac{r}{2} \leq 1, t = \frac{-r}{2} \Rightarrow -1 \leq r \leq 0;$$

$$x = 0, 0 < y < 1 \Rightarrow t - \frac{r}{2} = 0, 0 < t + \frac{r}{2} < 1 \Rightarrow 0 < r < 1;$$

$$x = 1, 0 < y < 1 \Rightarrow t - \frac{r}{2} = 1, 0 < t + \frac{r}{2} < 1 \Rightarrow -1 < r < 0;$$

$$0 < x < 1, y = 1 \Rightarrow 0 < t = \frac{-r}{2} < 1, t = 1 - \frac{-r}{2} \Rightarrow 0 < r < 1.$$

Portanto a função densidade de probabilidade da amplitude $R$ é

$$f_R(r) = \begin{cases} \int_{-\frac{r}{2}}^{\frac{r+2}{2}} 90r^8 dt = 90r^8(r+1) & : \quad -1 < r < 0 \\ & : \\ \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{2-r}{2}} 90r^8 dt = 90r^8(1-r) & : \quad 0 < r < 1 \end{cases}$$

0.3. **Função de distribuição empírica.** Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $F$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. A função de distribuição empírica é definida por:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}$$

Observe que a função de distribuição empírica é um estimador não viciado e consistente da função de distribuição,

$$E[F_n(x)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[1_{\{X_i \leq x\}}] = F(x)$$

e

$$Var(F_n(x)) = E[(F_n(x) - F(x))^2] = \frac{1}{n^2} Var(\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

que converge para 0 quando $n$ converge para o infinito. Portanto $F_n(x) \to^{mq} F(x)$, $F_n(x) \to^{P} F(x)$ e $F_n(x) \to^{D} F(x)$.

Com mais rigor, Glivenko-cantelli, provou o teorema

**Teorema 0.4.** *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $F$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Então*

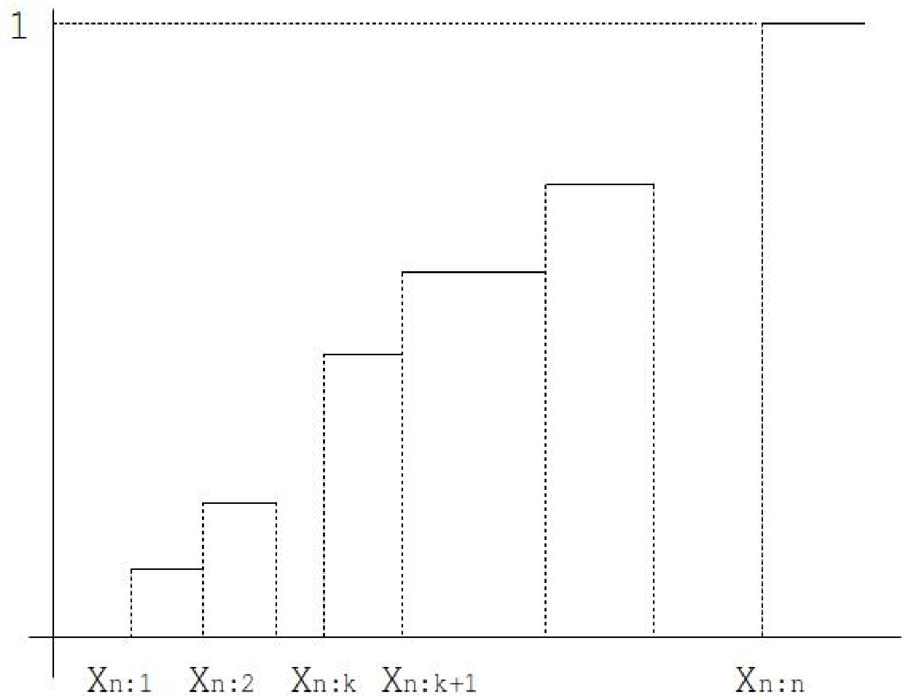
$$\sup_{x \in \Re} |F_n(x) - F(x)| \to^{qc} 0.$$

Note que

$$P(F_n(x) \geq \frac{k}{n}) = P(nF_n(x) \geq k) = P(X_{(n;k)} \leq x)$$

e

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & : & x < X_{(n;1)} \\ \frac{k}{n} & : & X_{(n;k)} \leq x < X_{(n;k+1)} \\ & : & \\ 1 & : & x \geq X_{(n;n)} \end{cases} .$$

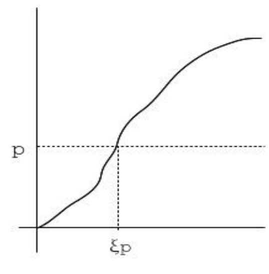



3

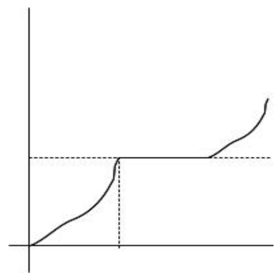
Portanto existe uma correspondência biunívoca entre $F_n(x)$ e as estatísticas de ordem.

Considere um número real $p, 0 < p < 1$ e seja $\zeta_p$ o p-ésimo quantil de $F$, isto é, $\zeta_p$ é a única solução de $F(x) = p$, quando existir.

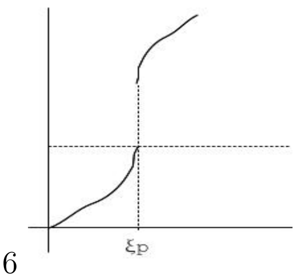
Se, para uma estatística de ordem $X_{(n;k)}$, $\frac{k}{n}$ converge para $p$ de maneira conveniente, $X_{(n;k)}$ é chamado o p-ésimo quantil amostral, $\widehat{\zeta}_{p,n}$. Embora existam várias maneiras de definirmos tal $k$, as mais adotadas são $k = k_p = [np] + 1$ e $k = k_p = [(n+1)p]$.




4



5




6

**Exemplo 0.5.** Se $p = \frac{1}{2}$, $\zeta_p$ é a mediana de $F$. Se n é impar, $n = 2m+1$ temos

$$[np]+1 = [\frac{(2m+1)}{2}]+1 = [m+\frac{1}{2}]+1 = m+1 \;\; e \;\; [(n+1)p] = [\frac{(2m+1+1)}{2}]$$
$$= [m+1] = m+1.$$

Assim o p-ésimo quantil amostral $\widehat{\zeta}_{p,n} = X_{(n;m+1)}$.

Se n é par, $n = 2m$ temos

$$[np]+1 = [\frac{2m}{2}]+1 = m+1 \quad e \quad [(n+1)\frac{1}{2}] = [m+\frac{1}{2}] = m.$$

Neste caso convencionamos definir p-ésimo quantil amostral como $\widehat{\zeta}_{p,n} = \frac{X_{(n;m+1)}+X_{(n;m)}}{2}$

Desde que $F_n$ é uma função escada, os p-ésimo quantis amostrais podem ser definidos como

$$\widehat{\zeta}^1_{p,n} = \sup\{x : F_n(x) \leq p\}$$
$$\widehat{\zeta}^2_{p,n} = \inf\{x : F_n(x) \geq p\}$$

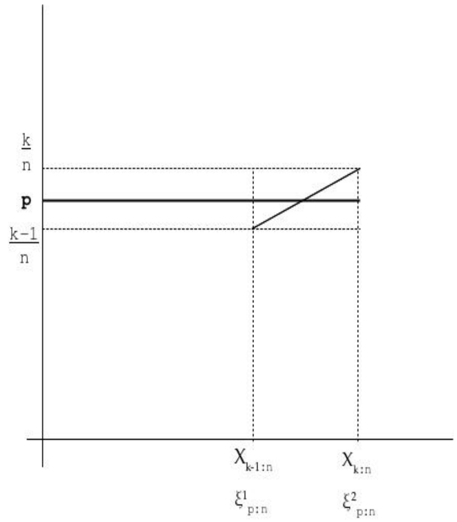
definem um intervalo aberto onde podemos realizar uma interpolação linear

Considerando uma relação linear $y = a + bx$ que relacione os pontos $(\widehat{\zeta}^1_{p,n}, \frac{k-1}{n})$ e $(\widehat{\zeta}^2_{p,n}, \frac{k}{n})$, isto é, resolvendo

$$\frac{k}{n} = a + b\widehat{\zeta}^2_{p,n}$$
$$\frac{k-1}{n} = a + b\widehat{\zeta}^1_{p,n}$$

temos $b = \frac{1}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}$ e $a = \frac{k}{n} - \frac{\widehat{\zeta}^2_{p,n}}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}$, produzindo a reta

$$y = \frac{k}{n} - \frac{\widehat{\zeta}^2_{p,n}}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})} + \frac{x}{n(\widehat{\zeta}^2_{p,n} - \widehat{\zeta}^1_{p,n})}.$$




7

A imagem inversa de $p$ através dessa reta é

$$x = \widehat{\zeta}^2_{p,n}(np + 1 - k) + \widehat{\zeta}^1_{p,n}(k - np).$$

Tais considerações justificam a adoção de $k_p$.

Para valores grandes de $n$ estas modificações são de menor importância. Observe que $X_{(n;k)}$, $(X_{(n;n-k+1)})$ é a $k$-ésima menor (maior) estatística de ordem. Em particular $X_{(n;1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}$ e $X_{(n;n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$.

No contexto da teoria assintótica, quando $\frac{k}{n} \to_{n\to\infty} 0$ ou $\frac{k}{n} \to_{n\to\infty} 1$, estas estatísticas de ordem são denominadas de valores extremos. As populações adequadas para tais formulações são:

A) Suponha que exista $\zeta_0 > -\infty$ tal que

$$F(x) > 0 \;\; se \;\; x > \zeta_0 \;\; e \;\; F(x) = 0 \;\; se \;\; x \le \zeta_0,$$

então $\zeta_0$ é denominado um ponto final inferior para $F$. Se $\zeta_0 = -\infty$, dizemos que $F$ tem um ponto final inferior infinito.

B) Suponha que exista $\zeta_1 < \infty$ tal que

$$F(x) < 1 \;\; se \;\; x < \zeta_1 \;\; e \;\; F(x) = 1 \;\; se \;\; x \ge \zeta_1,$$

então $\zeta_1$ é denominado um ponto final superior para $F$. Se $\zeta_1 = \infty$, dizemos que $F$ tem um ponto final superior infinito.

O comportamento das distribuições dos valores extremos dependem se a população tem pontos finais inferiores (superiores) finitos ou não.

**Teorema 0.6.** *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $F$ definidas em um espaço* *de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Se $F$ tem um ponto final inferior finito $(\zeta_0)$ e um ponto final superior finito $(\zeta_1)$, então $X_{(n;n)} \to_P \zeta_1$ e $X_{(n;1)} \to_P \zeta_0$.*

*Proof.* Se $\zeta_1$ é um ponto final superior finito,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \ 0 < \eta = \eta(\varepsilon) < 1, : F(\zeta_1 - \varepsilon) = 1 - \eta.$$

Portanto

$$P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \varepsilon) = P(X_{(n;n)} > \varepsilon + \zeta_1) + P(X_{(n;n)} < \zeta_1 - \varepsilon) =$$

$$1 - P(X_{(n;n)} \leq \varepsilon + \zeta_1) + \pi_{i=1}^n P(X_i < \zeta_1 - \varepsilon) = 1 - \pi_{i=1}^n P(X_i < \zeta_1 + \varepsilon) + (F(\zeta_1 - \varepsilon))^n =$$

$$1 - (F(\zeta_1 + \varepsilon))^n + (1-\eta)^n = 1 - 1 + (1-\eta)^n = (1-\eta)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} (1-\eta)^n = 0.$$

Em adição, $\forall m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{(n;n)} - \zeta_1| > \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\eta)^n = \frac{1-\eta}{\eta} < \infty$$

e $X_{(n;n)} \to_{qc} \zeta_1$.

Se $\zeta_0$ é um ponto final inferior finito,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \ \ 0 < \eta = \eta(\varepsilon) < 1, : F(\zeta_0 + \varepsilon) = \eta.$$

$$P(|X_{(n;1)} - \zeta_0| \leq \varepsilon) = P(X_{(n;1)} > \zeta_0 - \varepsilon) - P(X_{(n;1)} > \zeta_0 + \varepsilon) =$$

$$\pi_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq \zeta_0 - \varepsilon)) - \pi_{i=1}^n (1 - P(X_i \leq \zeta_0 + \varepsilon)) =$$

$$1 - (1 - F(\zeta_0 + \varepsilon))^n = 1 - (1-\eta)^n.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;1)} - \zeta_1| \leq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} 1 - (1-\eta)^n = 1.$$

Em adição, $\forall m \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{(n;1)} - \zeta_0| > \frac{1}{n}) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\eta)^n = \frac{1-\eta}{\eta} < \infty$$

e $X_{(n;1)} \to_{qc} \zeta_1$.

$\square$

**Teorema 0.7.** *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $F$ definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$. Assuma que o p-ésimo quantil $\zeta_p, 0 < p < 1$ é unicamente definido, isto é, $\forall \varepsilon > 0, F(\zeta_p - \varepsilon) < F(\zeta_p) = p < F(\zeta_p + \varepsilon)$. Então o p-'esimo quantil amostral $X_{(n;k)}$, com $k = k_p$, é tal que $X_{(n;k)} \to^P \zeta_p$ e $X_{(n;k)} \to^{qc} \zeta_p$.*

*Proof.*

$$P(|X_{(n;k)} - \zeta_p| \leq \varepsilon) = P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) - P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon).$$

Consideremos a variável aleatória $Y^+$ com distribuição binomial de parâmetro $n$ e $F(\zeta_p + \varepsilon)$, de forma que

$$P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) = P(Y^+ \geq k) = P(\frac{Y^+}{n} \geq \frac{k}{n}).$$

Contudo $\frac{Y^+}{n} \to^{qc} F(\zeta_p{+}\varepsilon) > p$ e $\frac{k}{n} \to p$. Concluimos que $\lim_{n\to\infty} P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \varepsilon) = 1$.

Por outro lado, consideremos a variável aleatória $Y^-$ com distribuição binomial de parâmetro $n$ e $F(\zeta_p - \varepsilon)$, de forma que

$$P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon) = P(Y^- \geq k) = P(\frac{Y^-}{n} \geq \frac{k}{n})$$

e $\frac{Y^-}{n} \to^{qc} F(\zeta_p - \varepsilon) < p$ e $\frac{k}{n} \to p$. Concluimos que $\lim_{n\to\infty} P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p - \varepsilon) = 0$.

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_{(n;k)} - \zeta_p| \leq \varepsilon) = 1$$

e $X_{(n;k)} \to^P \zeta_p$.

A prova da convergência quase certa não será reproduzida no texto.

□

**Teorema 0.8.** *Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas definidas em um espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ com distribuição $F$ e função densidade de probabilidade $f(x)$ tal que $f(\zeta_p) > 0$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p)}{\gamma} \leq x) = P(Z \leq x)$$

*onde $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2}$.*

*Proof.* Consideremos a variável aleatória $Y_n$ com distribuição binomial de parâmetros $n$ e $F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)$.

$$P(\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p) \leq x) = P(X_{(n;k)} \leq \zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x) = P(Y_n \geq k) =$$

$$P(\frac{Y_n - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)(1 - F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x))}} \geq$$

$$\frac{k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)(1 - F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x))}}).$$

Para calcular o limite, quando $n \to \infty$ da expressão à direita usaremos o teorema do valor médio ($\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a+\theta(b-a)), 0 < \theta\theta < 1$).

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)) = \frac{k}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n}}[\int_0^{\zeta_p} \zeta f(z)dz + \int_{\zeta_p}^{\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x} f(z)dz] =$$

$$\frac{k}{\sqrt{n}} - \frac{np}{\sqrt{n}} - \frac{n}{\sqrt{n}}[\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x - \zeta_p]f(\zeta_p + \theta(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x) - \zeta_p), 0 < \theta < 1.$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)) = -xf(\zeta_p)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k - nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)}{\sqrt{nF(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x)(1 - F(\zeta_p + \frac{1}{\sqrt{n}}x))}}) = \frac{-xf(\zeta_p)}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

Concluimos que, pelo teorema do limite central

$$\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p) \leq x) = P(Z \leq \frac{-xf(\zeta_p)}{\sqrt{p(1-p)}})$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\sqrt{n}(X_{(n;k)} - \zeta_p)}{\gamma} \leq x) = P(Z \leq x)$$

onde $\gamma^2 = \frac{p(1-p)}{f(\zeta_p)^2}$.

□

**Exemplo 0.9.** Sejam $x_1, ..., X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de par ametro $\lambda$. Desde que $P(X_1 > x) = e^{-\lambda x}$ temos que a mediana $m$ é a solução de $e^{-\lambda m} = 0,5$, isto é $m = \frac{0,7}{\lambda}$. Portanto

$$f(m) = \lambda e^{-\frac{0,7}{\lambda}} = 0,5\lambda.$$

Pelo teorema acima

$$Md \sim N(\frac{0,7}{\lambda}, \frac{1}{4n0,25\lambda^2}).$$

Um intervalo de confiança para $\lambda$, ao nível de $0,95$ de confiança é obtido através de

$$P(-1,96 \leq (Md - \frac{0,7}{\lambda})\sqrt{n}\lambda \leq 1,96) = 0,95$$

produzindo

$$(\frac{-1,96 + 0,7\sqrt{n}}{\sqrt{n}m}, \frac{1,96 + 0,7\sqrt{n}}{\sqrt{n}m}).$$

*E-mail address*: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil