MAE 224 - PROBABILIDADE II
Sexta Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno
Resolução da lista 6

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(-1,1)$. Defina a variável

$$Y_n = \min\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\}.$$

Mostre que Y_n converge em probabilidade para 0.

(Resposta)

Note que $|X_i| \overset{iid}{\sim} U(0,1)$, possui densidade $f_{|X_i|}(x) = I_{(0,1)}(x)$ e portando sua função de distribuição é

$$F_{|X_n|}(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

Agora encontraremos a distribuição de $Y_n = \min(|X_1|, \ldots, |X_n|)$.

$$G_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(\min(|X_1|, \ldots, |X_n|) \leq y) = 1 - P(\min(|X_1|, \ldots, |X_n|) > y)$$
$$= 1 - P(|X_1| > y, \ldots, |X_n| > y)$$
$$\overset{ind}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(|X_i| > y) \overset{idt}{=} 1 - [P(|X_1| > y)]^n = 1 - (1-y)^n,$$

então

$$g_{Y_n}(y) = G'_{Y_n}(y) = (1-(1-y)^n)' = n(1-y)^{n-1}I_{(0,1)}(y),$$

logo $Y_n \sim Beta(1,n)$.

$$\mathbb{E}[Y_n^r] = \frac{\int_0^1 y^r(1-y)^{n-1}dy}{Beta(1,n)} = \frac{Beta(r+1,n)}{Beta(1,n)} = \frac{\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n)}{\Gamma(r+n+1)}}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}} = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+n+1)},$$

assim

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{n+1},$$
$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \frac{\Gamma(3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

e

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+2-n-2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right] = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(Y_n\right) = 0$ então $Y_n \overset{P}{\Rightarrow} 0$.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parâmetro λ. Prove que a sequência $(X_n^2)_{n\geq 1}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

(Resposta)

$\mathbb{E}\left[|X_i^2|\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \frac{2}{\lambda^2} < \infty$, portanto as variáveis X_i^2 são integráveis, têm média $\frac{2}{\lambda^2}$ e iid daí segue que vale a Lei Forte dos Grandes Números.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $0 < p < 1$. Defina $Y_n = (\pi_{k=1}^n X_k)^{\frac{1}{n}}$

a) Calcule $P(Y_n > 0)$ e $E[Y_n]$.

b) Verifique se Y_n converge em probabilidade.

(Resposta)

Note que como X_i só pode assumir dois valores, zero e um, então $(\pi_{k=1}^n X_k)^{\frac{1}{n}}$ também só pode assumir dois valores, zero e um. Em particular, $Y_n = 1$ quando $X_1 = 1, \ldots, X_n = 1$ e $Y_n = 0$ quando $\exists\ j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $X_j = 0$. Então

$$P(Y_n = y) = \begin{cases} p^n \text{ se } y = 1 \\ 1 - p^n \text{ se } y = 0 \end{cases},$$

logo $Y_n \sim B(p^n)$ e consequentemente

$$P(Y_n > 0) = P(Y_n = 1) = p^n,$$
$$\mathbb{E}\left[Y_n\right] = p^n,$$
$$\operatorname{Var}\left(Y_n\right) = p^n(1 - p^n).$$

Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n\right] = \lim_{n\to\infty} p^n = 0$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}\left(Y_n\right) = \lim_{n\to\infty} p^n(1 - p^n) = 0,$$

portanto $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, X_n com distribuição $N(n, \sigma^2)$. A sequência de variáveis $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição?

(Resposta)

Não converge em distribuição. Esta resposta é bem intuitiva pois a média desta normal cresce indefinidamente. Mas podemos ver isto a partir da função característica da normal $\varphi_{X_n}(t) = e^{itn}e{-}\sigma^2 t/2$.

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} e^{itn}e{-}\sigma^2 t/2 = e{-}\sigma^2 t/2 \lim_{n\to\infty} e^{itn} = e{-}\sigma^2 t/2 \lim_{n\to\infty} cos(tn){+}isen(tn),$$

que não converge para nehuma função característica.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Cauchy padrão. Verifique se $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^{D}$.

(Resposta)

Um resultado importante acerca da distribuição Cauchy padrão é que sua função característica, $\varphi_{X_i}(t)$, é dada por $e^{-|t|}$. Agora calcularemos a função característica de $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$ utilizando o fato de que, quando as variáveis são independentes, a função característica da soma é o produto das funções características individuais.

$$\varphi_{\frac{t}{n^2}}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} X_j}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{n^2}\sum_{j=1}^{n} X_j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} e^{i\frac{t}{n^2}X_j}\right]$$

$$\overset{ind}{=} \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{n^2}X_j}\right] \overset{idt}{=} \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n^2}\right) = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n^2}\right)\right)^n = e^{-\left|\frac{t}{n^2}\right|^n} = e^{-|\frac{t}{n}|}.$$

Tomando o limite,

$$\lim_{n\to\infty} e^{-|\frac{t}{n}|} = e^{-0} = 1 = e^{it0},$$

que claramente é uma função característica, de fato é a função característica da variável aleatória degenerada no ponto 0, X^*.

Pois

$$\varphi_{X^*}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX^*}\right] = e^{it0} * P(X^* = 0) = e^0 * 1 = 1.$$

Então $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{D} 0$.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Determine o tamanho da amostra para que

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}) \simeq 0,95.$$

(Resposta)

Como $\sigma^2 < \infty$ então via Teorema do Limite Central vemos que $\overline{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, isto é, para n grande $\overline{X}_n$ possui distribuição normal. Vamos estudar o comportamento assintótico de $P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}\right) \simeq 0,95$.

$$P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}\right) = P\left(\frac{|\overline{X}_n - \mu|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right),$$

em que $Z \sim N(0,1)$ e $\Phi(\cdot)$ é sua função de distribuição.

Temos que resolver a equação

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0,95 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{10} = Z_{0,95} \Leftrightarrow \sqrt{n} = 10 \cdot Z_{0,95} \Leftrightarrow n = 100 \cdot (Z_{0,95})^2,$$

como o quantil da normal padrão de ordem $0,95$ é $1,64$ então

$$n = 100 \cdot 1,64^2 \simeq 269.$$

Como 269 é um “n grande” então vale a distribuição assintótica de $\overline{X}_n$ e concluímos a questão.

7) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $N(0,1)$. Mostre que $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - 1)^2}$ converge quase certamente.

(Resposta)

Note que podemos reescrever essa razão como

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i + 1)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n + \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Vale ressaltar que todos os momentos da distribuição normal são finitos e ela é integrável, portanto podemos aplicar a lei forte dos grandes números na média das variáveis X_i. E

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \text{Var}\left(X_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 = 1 + 0 = 1.$$

Como $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1 < \infty$ então as variáveis X_1 e X_1^2 são integráveis. Pela lei forte de Kolmogorov temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{q.c.}{\Rightarrow} 1.$$

Finalmente

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{1+1-2*0} = \frac{1}{2},$$

pois um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem quase certamente também converge quase certamente se as sequências estão bem definidas (ou seja, o denominador é zero um número finito de vezes).

8) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_n \sim Exp(2^{\frac{n}{2}})$. Mostre que vale a Lei forte dos Grandes Números.

(Resposta)

Note que, como trata-se de uma variável não negativa, vale

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \mathbb{E}\left[X_n\right] = \frac{1}{2^{n/2}} = 2^{-n/2}.$$

$$\mathrm{Var}\left(X_n\right) = \frac{1}{\left(2^{n/2}\right)^2} = 2^{-n}.$$

Como as variáveis não são identicamente distribuídas então temos que verificar se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty$, se isto for verdade então vale a lei forte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Logo vale a Lei Forte dos Grandes Números.

9) Seja $(X_n)_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\log n} \quad e \quad P(X_n = n) = \frac{1}{\log n}.$$

Mostre que $X_n \to^P 0$ mas x_n não converge em média quadrática.

(Resposta)

Seja $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - 0| \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X_n \geq \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0,$$

logo $X_n \xrightarrow{P} 0$, pois o resultado vale para todo $\epsilon > 0$.

Note que

$$\mathbb{E}\left[X_n^2\right] = n^2 \cdot \frac{1}{\ln(n)},$$

como

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n^2\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\ln(n)} = +\infty$$

então $\mathbb{E}\left[X_n^2\right] \not\to \mathbb{E}\left[0\right] = 0$ e X_n não converge em média quadrática.

10) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Prove que o coeficiente de variação amostral converge , em probabilidade, para o coeficiente de varição populacional, isto é $\frac{S_n}{\overline{X}_n} \to^P \frac{\sigma}{\mu}$.

(Resposta)

$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ e $S_n = \sqrt{S_n^2}$. Podemos reescrever a razão $S_n/\overline{X}_n$ como

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 2X_i\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right)}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\overline{X}_n^2 + \overline{X}_n^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \overline{X}_n^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}.\end{aligned}$$

Como os X_i têm variância finita então são integráveis. Como $\mathbb{E}\left[|X_i^2|\right] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathrm{Var}(X_i) + \left(\mathbb{E}\left[X_i\right]\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2 < \infty$ então os X_i^2 também são integráveis.

Aplicando a lei forte temos

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{q.c.}, \mu$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{q.c.} \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\overline{X}_n^2 \xrightarrow{q.c.} \mu^2,$$

pois as funções contínuas preservam a convergência.

Vale lembrar que a diferença de duas sequências que convergem quase certamente também converge quase certamente, assim,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2 \overset{q.c.}{\to} \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Como a raiz quadrada é uma função contínua, temos,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2} \overset{q.c.}{\to}= \sqrt{\sigma^2} = \sigma.$$

Agora basta lembrar que a razão entre duas sequências que convergem quase certamente também converge quase certamente. E finalmente obtemos

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}_n^2}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \overset{q.c.}{\to} \frac{\sigma}{\mu}.$$

E assim temos $\frac{S_n}{\overline{X}_n} \overset{q.c.}{\to} \frac{\sigma}{\mu}$. Mas convergência quase certa implica convergência em probabilidade e concluímos a questão com

$$\frac{S_n}{\overline{X}_n} \overset{P}{\to} \frac{\sigma}{\mu}.$$

11) Seja X_n uma variável aleatória com distribuição χ_n^2. Prove que $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$ converge em distribuição.

(Resposta)

Como $\mathbb{E}[X_n] = n$ e $\mathrm{Var}(X_n) = 2n$ e a soma de qui-quadrados independentes tem distribuição qui-quadrado então podemos reescrever esta razão como

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\chi_1^2 - n\cdot 1}{\sqrt{2\cdot n}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\chi_1^2 - 1}{\sqrt{2/n}} \overset{D}{\to} N(0,1).$$

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil