MAE 224 - PROBABILIDADE II
Sexta Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(-1,1)$. Defina a variável

$$Y_n = \min\{|X_1|, |X_2|, ..., |X_n|\}.$$

Mostre que Y_n converge em probabilidade para o.

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição exponencial de parâmetro λ. Prove que a sequência $(X_n^2)_{n\geq 1}$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números.

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Bernoulli com parâmetro p, $0 < p < 1$. Defina $Y_n = (\pi_{k=1}^{n} X_k)^{\frac{1}{n}}$

a) Calcule $P(Y_n > 0)$ e $E[Y_n]$.

b) Verifique se Y_n converge em probabilidade.

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias, X_n com distribuição $N(n, \sigma^2)$. A sequência de variáveis $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição?

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição de Cauchy padrão. Verifique se $\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i \to^{D} ?$.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Determine o tamanho da amostra para que

$$P(||\overline{X}_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{10}) \simeq 0,95.$$

7) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição $N(0,1)$. Mostre que $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)^2}$ converge quase certamente.

8) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com $X_n \sim Exp(2^{\frac{n}{2}})$. Mostre que vale a Lei forte dos Grandes Números.

9) Seja $(X_n)_{n\geq 2}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, com

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\log n} \quad e \quad P(X_n = n) = \frac{1}{\log n}.$$

Mostre que $X_n \to^P 0$ mas X_n não em média quadrática.

10) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média μ e variância $\sigma^2 < \infty$. Prove que o coeficiente de variação amostral converge , em probabilidade, para o coeficiente de variação populacional, isto é $\frac{S_n}{\overline{X}_n} \to^P \frac{\sigma}{\mu}$.

11) Seja X_n uma variável aleatória com distribuição χ^2_n. Prove que $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}}$ converge em distribuição.

12) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes i identicamente distribuidas tais que $E[X_1] = 0$, $Var(X_1) = 1$ e $E[X_1^4] < \infty$. Defina

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{X_1X_2 + X_3X_4 + ... + X_{2n-1}X_{2n}}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_{2n}^2}$$

Qual o limite em distribuição de Z_n?

13) Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias positivas, independentes e com funções de distribuições absolutamente contínuas $F_1, F_2, ...$ respectivamente. Defina

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{X_i} \frac{dF_i(x)}{1 - F_i(x)}.$$

Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{g(\frac{y}{n})Y^{n-1}e^{-y}}{(n-1)!} dy.$$