MAE 224 - PROBABILIDADE II
Quinta Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que , para cada j, $P(X_j = \pm j^{\alpha}) = \frac{1}{6j^{2(\alpha-1)}}$ e $P(X_j = 0) = 1 - \frac{1}{3j^{2(\alpha-1)}}$. Para que valores de $\alpha, \alpha > 1$ a condição de Liapunov é válida?

2)Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, X_n com função densidade de probabilidade

$$f_n(x) = \frac{1}{2n} e^{-\frac{|x|}{n}}, x \in \Re.$$

Verifique se a condição de Liapunov é válida?

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas tais que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = 1$.

Seja $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que $P(Y_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}$ e $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n^2}$. Verifique que a condição de Lindeberg não vale, mas

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=1}^{n} Y_k) \to^D N(0,1).$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes uniformemente distribuidas no intervalo $(-a_n, a_n)$. Encontre condições para que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|y-E[X_k]|>\varepsilon n\}} (y - E[X_k])^2 dF_k(y) = 0.$$

5)) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Calcule o limite em probabilidade de $\frac{\sum_{k=1}^{n} - \log X_k}{n}$.