MAE 224 - PROBABILIDADE II
Terceira Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Verifique, nos casos abaixo, se a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Em caso afirmativo, qual a distribuição limite:

a) $X_n \sim U(0, n)$.

b) X_n tal que
$F_{X_n}(x) = 0, \quad se \quad x < \frac{1}{n};$
$F_{X_n}(x) = \frac{1}{2}(x + 1 - \frac{1}{n}), \quad se \quad \frac{1}{n} \leq x < 1 + \frac{1}{n};$
$F_{X_n}(x) = 1, \quad se \quad x \geq 1 + \frac{1}{n}.$

2) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com

$$P(X_n = k) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}, \quad k \in \{0, 1, ..., n\}.$$

Prove que $\frac{X_n}{n}$ converge em distribuição para X,onde

$$F_X(x) = x^2 \quad se \quad 0 \leq x < 1 \quad e \quad 0 \quad c.c..$$

3) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Cauchy padrão. Qual o limite em distribuição de $(\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n})_{n\geq 1}$?

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição binomial de parâmetros

n, $p_n, 0 < p_n < 1$ e a sequência $(p_n)_{n\geq 1}$ satisfaz $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda, \lambda > 0$. Mostre que X_n converge em distribuição para uma distribuição de Poisson com parâmetro λ.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com distribuições geométricas de parâmetros $\frac{\lambda}{n}, \lambda > 0$. Seja $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Prove que a sequência $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição. Qual o limite?