



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos

PSI - EPUSP

## PSI 3214 - LABORATÓRIO DE INSTRUMENTAÇÃO ELÉTRICA (2017) EXPERIÊNCIA 4 - PONTE DE WHEATSTONE

### 1. Objetivos

Desenvolver a capacidade de compreensão, análise e implementação de medições elétricas baseadas em Pontes de Wheatstone.

Através das atividades deste experimento, os alunos devem obter os seguintes conhecimentos e práticas:

- Obter equilíbrio de pontes,
- Sensibilidade de medição,
- Medição utilizando extensômetro.

### 2. Glossário

Antes de qualquer coisa, vamos ver a seguir os significados de alguns termos relacionados com medições.

- Erro:** Diferença entre o valor medido e um valor de referência. Normalmente expresso em porcentagem.
- Exatidão:** Indicação da proximidade entre o resultado da medição e o valor verdadeiro. Trata-se de um conceito qualitativo. Uma medida será dita mais exata quanto menor o erro de medição.
- Incerteza:** Faixa de valores que podem ser atribuídos a um valor medido. Exemplo:  $(1,00 \pm 0,05)V$  indica que foi obtido na medição o valor de 1,00V, mas que pode ser entre 0,95V ~ 1,05V. A determinação de incerteza é feita por meio de um processo de calibração utilizando um instrumento de referência.
- Precisão:** Indicação o grau de dispersão das medidas. Diz-se que uma medida é precisa quando o desvio entre os valores de medidas sucessivas de um mensurando é pequeno.
- Resolução:** Menor indicação de uma medida perceptível. Num instrumento com mostrador digital refere-se ao dígito menos significativo. No caso de instrumento analógico considera-se com sendo a metade da menor escala.
- Sensibilidade:** Relação entre a resposta do medidor e a variação da grandeza sob medida. Diz-se que um instrumento é sensível se for capaz de detectar uma pequena mudança da variável em questão.

### 3. Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone<sup>1</sup> consiste de uma rede elétrica de quatro resistores, um detector e uma fonte, conforme ilustração da Figura 1. A ponte proporciona elevada sensibilidade nas medições, sendo muito utilizada em medições com sensores<sup>2</sup>.

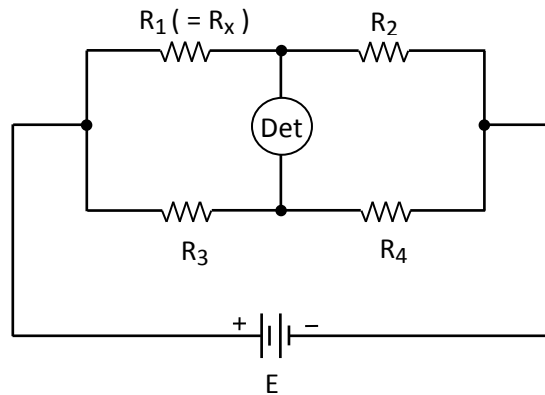


Figura 1 - Ponte de Wheatstone.

O circuito da Figura 1 permite a determinação do valor de uma das resistências (por exemplo,  $R_1 = R_x$ ) em função das demais, que são conhecidas. Para isso, deve-se variar as resistências conhecidas até que o detector indique a tensão (ou a corrente) nula. Nesta condição diz-se que a ponte está em equilíbrio e demonstra-se facilmente que vale a relação (1).

$$(1) \quad R_1 R_4 = R_3 R_2 \quad \text{ou}$$
$$R_1 = \frac{R_2}{R_4} R_3$$

Obs.: Como veremos adiante, determina-se o valor de  $R_1$  variando-se as demais resistências até que a tensão no detector se anule, quando então (1) será satisfeita. Na nossa experiência, nós variaremos apenas a resistência  $R_3$ , as demais permanecerão fixas.

A ponte de Wheatstone permite medidas de elevada exatidão, desde que sua construção seja bem projetada e cuidada. Para isso, as resistências conhecidas devem ter valores bastante estáveis, variando muito pouco em função da temperatura, frequência, pressão, deformação, aceleração, etc.

Evidentemente, a precisão e a exatidão da ponte dependem da precisão e da exatidão das resistências que a compõem. Além disso, a fonte de alimentação deve ser bastante estável também, podendo ser empregadas baterias ou fontes de tensão reguladas de alta qualidade. O detector deve ter sensibilidade elevada e pode ser realizado por um galvanômetro ou multímetro

<sup>1</sup> Descrita pela primeira vez por Christie, em 1833.

<sup>2</sup> Aceleração, pressão, tensão mecânica, posição, potência eletromagnética, etc. Veja as aplicações da ponte fazendo uma busca para "wheatstone and bridges".

digital. Nesta experiência utilizaremos um multímetro digital de bancada com 6 ½ dígitos de resolução.

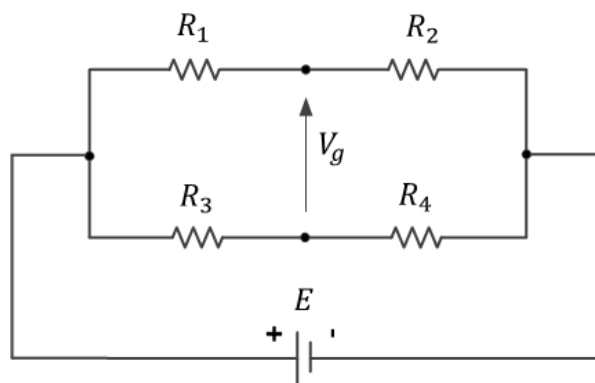
#### 4 Análise de sensibilidade

Para efeito de análise, o detector (D) mostrado na Fig. 1 pode ser de dois tipos: resistência finita ou resistência infinita. Por exemplo, um micro-amperímetro ( $R_{in} \approx 2 \text{ k}\Omega$ ) como detector pode ser considerado como sendo de resistência finita. Enquanto que, se utilizarmos um multímetro de bancada ( $R_{in} \approx 10 \text{ M}\Omega$ ), podemos considerá-lo como sendo de resistência infinita (trata-se de uma aproximação válida dentro de determinadas condições).

Uma ponte é denominada sensível quando o seu detector de zero é capaz de “sentir” uma pequena variação relativa das resistências de seus braços (ou seja, ao sair do equilíbrio, o detector mede algum valor diferente de zero). Evidentemente, uma medida com alta exatidão implica alta sensibilidade da ponte. No nosso experimento, um bom projeto precisa levar em conta a possibilidade de equilibrar a ponte ajustando-se  $R_3$ , ou seja, deve ser possível variar  $R_3$  em passos pequenos o suficiente para que se consiga equilibrar a ponte e efetuar a medida.

#### Detector de Resistência Infinita

Vamos considerar que o detector escolhido seja de resistência infinita<sup>3</sup> e deseja-se medir com exatidão a resistência  $R_1$ . O circuito equivalente é mostrado na Fig. 2.



**Figura 2** - Circuito equivalente da ponte com o detector de resistência infinita.

O detector mede a tensão  $V_g$  na saída do circuito como indicado na Figura 2. A tensão  $V_g$  é obtida pela expressão a seguir:

$$(2) \quad V_g = \left( \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) E$$

Vamos definir o ganho de tensão da ponte por

<sup>3</sup> A resistência interna do detector deve ser no mínimo 100 vezes (preferencialmente 1000 vezes) maior que as resistências  $R_3$  e  $R_4$ .

$$(3) \quad G_v \triangleq \frac{V_g}{E}$$

À vista da relação (2), o ganho de tensão fica:

$$(4) \quad G_v = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

No equilíbrio, o ganho de tensão é, portanto  $(G_v)_{\text{equil.}} = 0$ . O objetivo agora é escolher  $R_2$ ,  $R_3$ , e  $R_4$  de forma que o ganho de tensão seja o maior possível para um pequeno desvio do equilíbrio. Para isto, é necessário determinar quão rapidamente a função  $G_v = G_v(R_1, R_2, R_3, R_4)$  varia com  $R_1$ .

Define-se, portanto, a sensibilidade do ganho em relação a  $R_1$  pela derivada parcial:

$$(5) \quad S_{R1} \triangleq \frac{\partial G_v}{\partial R_1}$$

Efetuada a derivação indicada resulta:

$$(6) \quad S_{R1} = -\frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \quad (\text{Verifique!})$$

Pergunta-se: que valor fixo de  $R_2$  deve ser escolhido para que a derivada acima (6) seja máxima?

Para responder esta pergunta, considere agora que  $R_1$  é fixo. Neste caso, o valor de  $R_2$  que maximiza o módulo de  $S_{R1}$  maximizará então a sensibilidade da ponte. Para encontrar o valor ótimo para  $R_2$ , basta fazer:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial R_2} |S_{R1}| = \frac{R_1 - R_2}{(R_1 + R_2)^3} = 0$$

Segue-se, portanto, a condição:

$$(8) \quad R_2 = R_1$$

Para verificar que a condição acima realmente se refere a um máximo, é necessário conferir se a derivada segunda de (7) é negativa quando (8) é satisfeita. De fato,

$$\frac{\partial^2}{\partial R_2^2} |S_{R1}| = -\frac{4R_1 - 2R_2}{(R_1 + R_2)^4} < 0$$

quando  $R_2 = R_1$ .

Usando a condição de equilíbrio da ponte (Expressão (1)), tem-se que:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = 1,$$

Logo, a condição para máxima sensibilidade no equilíbrio é:

$$(9) \quad R_1 = R_2 \quad e \quad R_3 = R_4$$

Portanto, para condição de **máxima sensibilidade**, devem ser iguais as resistências dos braços em cada lado do detector. Note que a condição (9) pressupõe que se conheça  $R_1$ , a resistência que se deseja medir! Na prática, para se usar uma ponte de Wheatstone é necessário que seja disponível um valor aproximado para a resistência desconhecida; a escolha de  $R_2$  é feita com base nesse valor aproximado.

O próximo passo é calcular qual é a menor variação de  $R_1$  que pode ser determinada com a ponte na condição de máxima sensibilidade, ou seja, o próximo passo é determinar a resolução da ponte!

A partir de (5), e passando a acréscimos finitos, é possível calcular a variação de  $R_1$  correspondente a  $\Delta v_{g\min}$ , que vem a ser a menor variação mensurável de  $v_g$ . De (5),

$$\frac{\Delta v_g}{E \cdot \Delta R_1} \cong S_{R_1}, \text{ para } \Delta R_1 \text{ pequeno, onde:}$$

$$(10) \quad \Delta R_{1\min} \cong \frac{1}{S_{R_1}} \frac{\Delta v_{g\min}}{E}$$

Satisfeita a condição (9), a sensibilidade (máxima) resulta:

$$(11) \quad S_{R_1\max} = - \frac{1}{4 R_1}$$

Substituindo esta expressão em (10), obtém-se a mínima variação relativa de  $R_1$  que pode ser detectada na ponte:

$$(12) \quad p_m = \left| \frac{\Delta R_{1\min}}{R_1} \right| = 4 \left| \frac{\Delta v_{g\min}}{E} \right|$$

O valor de  $p_m$  é a medida da menor variação relativa de  $R_1$ , e conclui-se que este valor está diretamente associado com a resolução do instrumento de medida ( $v_g$ ) e com a sensibilidade máxima de transdução  $\left(\frac{\partial Gv}{\partial R_1}\right)$ .

O valor  $p_m$  permite avaliar (e por que não dizer quantificar) a resolução da ponte, isto é, uma variação relativa de  $R_1$  menor que  $p_m$  não pode ser observada com tal circuito.

Portanto, quanto **menor**  $p_m$ , **melhor** será a sua sensibilidade.

O equilíbrio da ponte é obtido variando-se  $R_3$ , como foi dito anteriormente. Portanto, para realmente ser possível usar toda a sensibilidade da ponte, é necessário poder variar  $R_3$  em passos suficientemente pequenos para atingir o equilíbrio. Para verificar se isto é possível, deve-

se calcular a qual variação de  $R_3$  corresponde uma variação de  $\Delta V_{g\min}$  no detector. Isto é feito da mesma forma com que foi determinada (11):

$$(13) \quad S_{R3} \triangleq \frac{\partial G_v}{\partial R_3} = \frac{R_4}{(R_3+R_4)^2} = \frac{1}{4R_3}$$

onde foi usada a condição (9). Portanto, para ser possível equilibrar a ponte é necessário ter

$$(14) \quad |\Delta R_{3\min}| \leq \frac{1}{S_{R_3}} \left| \frac{\Delta V_{g\min}}{E} \right| \Rightarrow \left| \frac{\Delta R_{3\min}}{R_3} \right| \leq p_m.$$

Este resultado implica que, para ser possível equilibrar a ponte, é necessário que a mínima variação *relativa* de  $R_3$  deve ser, *no máximo*, da mesma ordem de grandeza que  $p_m$ . Esta conclusão fornece parâmetros para a escolha de  $R_3$ : a caixa de resistências e o valor de  $R_3$  devem ser tais que a mínima variação da caixa, dividido pelo valor de  $R_3$ , seja menor que a resolução da ponte,  $p_m$ , obtida de (12). Note que  $R_3$  será o único grau de liberdade que teremos no circuito no experimento.

Note também que o valor de  $p_m$  (12) diminui se for aumentado o valor de  $E$ . No entanto, o valor da tensão que alimenta o circuito será limitado pela corrente de operação das caixas de resistências!

## 5 - Considerações sobre o projeto de uma ponte

O projeto de uma ponte pode variar de acordo com o valor da resistência indeterminada a medir, aplicação e o equipamento disponível. As pontes podem servir para medir (ou comparar) resistências com alta exatidão. Em instrumentação, as pontes são empregadas para medir resistências de transdutores que convertem uma grandeza não elétrica em resistência elétrica. Um exemplo de transdutor é o extensômetro<sup>4</sup> (*strain-gauges*) que será utilizado nesta experiência.

Vamos ver os passos para projetar a ponte (Fig. 2) considerando que o resistor  $R_1$  é um extensômetro (transdutor de deformação).

- Da condição de equilíbrio e de máxima sensibilidade (expressão 9) tem-se que  $R_1 = R_2$  e  $R_3 = R_4$ .
- O  $R_1$  é a resistência do transdutor (o fabricante especifica a resistência nominal, assim partimos para o projeto com um valor conhecido). Logo, o valor de  $R_2$  está determinado.
- Os valores de  $R_3$  e de  $R_4$  devem ser iguais. A escolha deve levar em conta a disponibilidade da caixa de resistências e dos valores de  $R_4$ , lembrando que  $\Delta R_{3\min}/R_3$  tem que ser menor que  $\Delta R_1/R_1$ .
- O valor da tensão de alimentação deve levar em conta que:
  - Quanto maior o seu valor melhor será a sensibilidade;

<sup>4</sup> Elementos que convertem grandezas mecânicas em elétricas.

- As correntes não devem ultrapassar os limites da caixa de resistores, das resistências fixas, nem do transdutor ( $R_1$ ).
- O efeito de variação dos resistores por aquecimento Joule deve ser minimizado ao máximo.