MAE 224 - PROBABILIDADE II
Quarta Lista de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Arredonda-se vinte números para o inteiro mais próximo e soma-se os números resultantes. Suponha que os erros individuais de arredondamento são independentes e se distribuem uniformemente no intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Determine a probabilidade de que a soma obtida difira da soma dos vinte números originais por mais de 3.

2) Lança-se uma moeda equilibrada até observar 100 caras. Determine a probabilidade de que sejam necessários, no mínimo, 226 lançamentos.

3) Se X uma variável aleatória com distribuição de Cauchy padrão, defina

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{|X|}{1+|X|})^k, \quad n \geq 1.$$

Calcule, se existir, $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$.

4) Seja X_n uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_n(t) = \frac{n}{4(n-1)} 1_{(-1, \frac{-1}{n})}(x) + \frac{3n}{4(n-1)} 1_{(\frac{1}{n}, 1)}(x).$$

a) Obtenha a função característica de X_n, $\psi_n(t)$.
b) Calcule $\lim \psi_n(t)$. O limite é uma função característica? Justifique.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas. Qual o limite em distribuição de

$$\sqrt{n}(\frac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}),$$

onde $\overline{X}_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ e $S_n^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2}{n}$.

6) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que X_n tem distribuição de Poisson de parâmetro $\sqrt{n}$. Verifique se $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}$ converge quase certamente.

7) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Calcule o limite em probabilidade de $\frac{\sum_{k=1}^n - \log X_k}{n}$.