0.1. **Convergência em média quadrática.** Os espaços vetoriais $L^p, p \geq 1$ são espaços de variáveis aleatórias X tais que $E[|X|^p] < \infty$, sem distinção entre variáveis aleatórias X e Y que são iguais quase certamente, isto é $P(X = Y) = 1$. Sob a norma $\|X\|_p = (E[|X|^p])^{\frac{1}{p}}$ é um espaço completo em que toda sequência de Cauchy converge. Pela desigualdade de Jensen, se $1 \leq p \leq q$, $\|X\|_p \leq \|X\|_q$ e $L^q \subseteq L^p$. Em nossas notas estudamos o caso particular em que $p = 2$.

Definição 0.1. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) tal que $E[|X_n|^2] < \infty, n \geq 1$. Dizemos que a sequência converge em média quadrática para uma variável aleatória X, com $E[|X|^2] < \infty$, e denotamos por $X_n \to^{mq} X$, se

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0.$$

A convergência em média quadrática tem um papel técnico na Teoria da Probabilidade, em situações quando a informação sobre a sequência de variáveis consiste das médias $E[X_n], n \geq 1$ e das covariâncias $E[(X_n - \mu_{X_n})(X_m - \mu_{X_m})]$. Em tais casos não conseguimos, em geral, trabalhar com a função característica $E[e^{itX_n}]$ ou avaliar quantidades tais como $P(X_n \geq \varepsilon)$ que são ferramentas para analisar convergência em distribuição e convergência quase certa, respectivamente. Ao contrário, os momentos de segunda ordem são suficientes para determinar se $(X_n)_{n\geq 1}$ converge em média quadrática ou não. Enfim, podemos utilizar o critério de Cauchy para provar a convergência

Teorema 0.2. *Uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.(s) tal que $E[|X_n|^2] < \infty$ converge em média quadrática para uma variável aleatória X se, e somente se*

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = 0.$$

Prova: *Observe o desenvolvimento quadrático:*

$$|X_n - X_m|^2 = |X_n - X|^2 + |X_m - X|^2 + 2|X_n - X||X_m - X|.$$

Pela desigualdade de Schwarz, se $X_n \to^{mq} X$ temos

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X||X_m - X|] \leq \lim_{n,m\to\infty} \sqrt{E[|X_n - X|^2]E[|X_m - X|^2]} = 0.$$

Assim, sob tal hipótese

$$\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = \lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X|^2 + |X_n - X|^2 + 2|X_n - X||X_m - X|] = 0$$

e vale a condição necessária.

Por outro lado, se aceitamos que $\lim_{n,m\to\infty} E[|X_n - X_m|^2] = 0$ concluímos a condição suficiente, pelo desenvolvimento quadrático acima, que $\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = 0$.

Observação 0.3. Procede da Desigualdade de Markov que

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}.$$

e concluimos que a convergência em média quadrática implica em convergência em probabilidade que, por sua vez, implica em convergência em distribuição. Como indica o exemplo seguinte a convergência quase certa não implica em convergência em média quadrática.

Exemplo 0.4. Seja uma sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ com $P(X_n = 2^n) = \frac{1}{n(n+1)}$ e $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n(n+1)}$ para todo n.

Temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \frac{1}{m}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty$$

e portanto $X_n \to^{qc} 0$.

Contudo

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^2] = \lim_{n\to\infty} E[X_n^2] = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{n(n+1)} = \infty$$

e $X_n \nrightarrow^{mq} 0$.

Apesar do exemplo acima, existem situações em que a implicação é verdadeira:

Teorema 0.5. *Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de v.a.(s)e X é uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$ e $|X_n| \leq Y$, com $E[Y^2] < \infty$, então $X_n \to^{mq} X$*

Prova: *Se $X_n \to^{qc} X$, $|X_n - X|^2 \to^{qc} 0$. Como $|X_n| \leq Y$, q.c.para todo $n \geq 1$ temos também que $|X| \leq Y$, q.c. e então $|X_n - X|^2 \leq 4Y^2$, q.c.*

Portanto, pelo teorema a convergência dominada temos

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^2] = E[\lim_{n\to\infty} |X_n - X|^2] = 0.$$

Observação 0.6. **Relação entre os tipos de convergência**

Os teoremas, propriedades e cotra-exemplos analisados nos permite organizar a seguinte relação entre os tipos de convergência:

Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias, então

Se

$$X_n \to^{qc} X \Rightarrow X_n \to^{P} X \Rightarrow X_n \to^{D} X$$

Em geral, o reverso das implicações não valem, contudo, se $P(X = k) = 1$, onde k úma constante, vale $X_n \to^{D} k \Rightarrow X_n \to^{P} k$

Em, adição

$$X_n \to^{mq} X \Rightarrow X_n \to^{P} X \Rightarrow X_n \to^{D} X$$

No existe uma relação entre convergência quase certa e convergência em média quadrática, contudo, se $(X_n)_{n\geq 1}$ é limitada por uma variável aleatória Y,$|X_n| \leq Y, qc$, com $E[Y^2] < \infty$, então convergência quase certa implica em convergência em média quadrática.

0.2. **O teorema do limite central.** Consideremos uma sequência de variáveis aleatórias independentes $(X_n)_{n\geq 1}$ definidas no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \Im, P)$ e seja $(S_n)_{n\geq 1}$ a sequência das somas parciais definidas por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

O problema do limite central trata da convergência em distribuição das somas parciais normalizadas

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^{D} N(0,1).$$

No capítulo anterior analisamos uma solução quando as variáveis aleatórias na sequência $(X_n)_{n\geq 1}$ são independentes e identicamente distribuidas, com média μ e variãncia σ^2 finita:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^{D} N(0,1).$$

Enunciamos o Teorema do limite Central de Lindeberg que dá condições gerais para a validade da convergência (para a prova ver Barry James).

Teorema 0.7. Lindeberg *Seja* $(Xn)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes com* $E[X_n] = \mu_n$ *e* $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ *e pelo menos um* $\sigma_n^2 > 0$. *Sejam* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *e* $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. *Se a condição de Lindeberg, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|x-\mu_k| > \varepsilon s_n\}} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

é satisfeita, então

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^{D} N(0,1).$$

Observação 0.8. A notação $\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}$ significa que o cálculo da integral é feito na região $(-\infty, \mu_k - \varepsilon s_n) \cup (\mu_k + \varepsilon s_n, \infty)$. Se X_k for discreta com função de probabilidade $p_k(x_i)$, então

$$\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) = \sum_{\{i:|x_i-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x_i-\mu_k)^2 p_k(x_i).$$

Por outro lado se X_k for absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_k(x)$, temos

$$\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) = \int_{-\infty}^{\mu_k-\varepsilon s_n} (x-\mu_k)^2 f_k(x)dx + \int_{\mu_k+\varepsilon s_n}^{\infty} (x-\mu_k)^2 f_k(x)dx.$$

Observe que

$$\sigma_k^2 = \int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) + \int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x),$$

de modo que a condição de Lindeberg pode ser escrita da seguinte forma

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) = 1.$$

A condição de Lindeberg significa, basicamente, que as parcelas $\frac{X_k-\mu_k}{s_n}$ da soma $\frac{S_n-E[S_n]}{s_n}$ são uniformemente pequenas para n grande. Por exemplo, a condição de Lindeberg implica

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n} \frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = 0,$$

ou seja, para n grande, as variâncias das parcelas são uniformemente pequenas em relação à variância da soma. Para ver isto, observe que Para todo k,

$$\frac{\sigma_k^2}{s_n^2} = \frac{1}{s_n^2} \int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) +$$
$$\frac{1}{s_n^2} \int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}} (x-\mu_k)^2 dF_k(x) \leq$$
$$\frac{1}{s_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}} (x-\mu_j)^2 dF_j(x) +$$
$$\frac{1}{s_n^2} \int_{\{|x-\mu_k|\leq\varepsilon s_n\}} \varepsilon^2 s_n^2 dF_k(x) \leq$$

$$\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_j)^2 dF_j(x)+\frac{1}{s_n^2}\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon^2 s_n^2 dF_k(x).$$

Este último termo não depende de k pois a última parcela é igual a ε^2. Portanto temos

$$max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2}\leq \varepsilon^2+\frac{1}{s_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_j|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_j)^2 dF_j(x)$$

que converge para ε^2, pela condição de Lindeberg. Como vale para todo $\varepsilon > 0$, temos o resultado

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2}=0.$$

Do ponto de vista intuitivo, isso serve para justificar a afirmação: a soma de um grande número de pequenas quantidades independentes e de médias zero tem aproximadamente a distribuição normal.

Observemos que a condição de Lindeberg é formalmente mais forte que a condição sobre o máximo das variâncias.

Como $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n}(x-\mu_k)^2 dF_k(x)$, a condição diz que, quando n é grande, é pequena a parte da variância da soma devida às "caudas" das X_k situadas a mais de ε desvios-padrão s_n das suas respectivas médias μ_k.

É interessante, porém, que na presença da condição sobre o máximo, a condição de Lindeberg torna-se necessária para a validade do teorema do limite central:

Teorema 0.9. Feller

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes com* $E[X_n] = \mu_n$ *e* $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$ *e pelo menos um* $\sigma_n^2 > 0$. *Sejam* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *e* $s_n^2 = Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2$.

Se

$$\lim_{n\to\infty} max_{1\leq k\leq n}\frac{\sigma_k^2}{s_n^2}=0$$

e

$$\frac{S_n-E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}}\to^{D} N(0,1),$$

então

$$\forall\varepsilon>0, \lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-\mu_k|>\varepsilon s_n\}}(x-\mu_k)^2 dF_k(x)=0.$$

O Lema seguinte será utilizado nos exemplos e exercícios:

Lema 0.10. *Para* $\lambda > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} = \frac{1}{\lambda+1},$$

de maneira que $\sum_{k=1}^{n} k^{\lambda}$ *é da ordem de* $n^{\lambda+1}$.

Prova:

Como $x^{\lambda} \leq k^{\lambda}$ *se* $k-1 \leq x \leq k$ *e* $k^{\lambda} \leq x^{\lambda}$ *se* $k \leq x \leq k+1$ *temos*

$$\int_{k-1}^{k} x^{\lambda} dx \leq \int_{k-1}^{k} k^{\lambda} dx = k^{\lambda} = \int_{k}^{k+1} k^{\lambda} dx \leq \int_{k}^{k+1} x^{\lambda} dx.$$

Portanto

$$\int_{0}^{n} x^{\lambda} dx \leq \sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \leq \int_{1}^{n+1} x^{\lambda} dx$$

e

$$\frac{n^{\lambda+1}}{\lambda+1} \leq \sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \leq \frac{(n+1)^{\lambda+1}-1}{\lambda+1} \leq \frac{(n+1)^{\lambda+1}}{\lambda+1},$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{\lambda+1} \leq \frac{1}{n^{\lambda+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda+1}(\frac{n+1}{n})^{\lambda+1}.$$

como $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^{\lambda+1} = 1$ *o lema está provado.*

Exemplo 0.11. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com $X_n \sim U(-n,n)$.Verifiquemos a condição de Lindeberg:

Observa-se facilmente que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = \frac{k^2}{3}$ para todo k.

Consideremos a parcela

$$\int_{|x|>\varepsilon s_n} x^2 dF_k(x) = \frac{1}{2k} \int_{-k}^{k} x^2 1_{\{|x|>\varepsilon s_n\}}(x) dx$$

e esta última integral é nula se $n < \zeta s_n$, pois neste caso , o integrando toma o valor zero em $(-k,k)$. Pelo lema acima temos

$s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$ é tal que

$$\frac{1}{3}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

isto é, quando n é grande, $\frac{s_n^2}{n^3} = \frac{s_n^2}{n^2}\frac{1}{n} \approx \frac{1}{9}$ e concluimos que $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \infty$.

Portanto,

$$\forall M > 0, \exists n_0 | \ \ se \ \ n \geq n_0 \to \frac{s_n}{n} > M.$$

Basta tomar $M = \frac{1}{\varepsilon}$ e temos $\varepsilon s_n > n$.

O teorema do limite central para sequências de varíaveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, analisado no capítulo anterior, segue como um corolário do teorema de Lindeberg

Corolário 0.12. *Seja* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média* $E[X_1] = \mu$ *e* $Var(X_1) = \sigma^2 < \infty$*, então*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^D N(0,1).$$

Prova: *Observe que* $s_n^2 = n\sigma^2$.

Verifiquemos a condição de Lindeberg, para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{|x-\mu|\leq\sigma\sqrt{n}\varepsilon\}}(x-\mu)^2 dF_k(x) =$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_{\{|x-\mu|\leq\sigma\sqrt{n}\varepsilon\}}(x-\mu)^2 dF_1(x) \to_{n\to\infty}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 dF_1(x) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

O Teorema de Liapunov, a seguir, é muito útil quando as variáveis aleatórias X_n possuem momentos finitos de ordem maior que 2. O teorema afirma que a convergência normal vale se as somas dos mementos centrais absolutos de ordem $2+\delta$ é assintóticamente pequena em relação a $s_n^{2+\delta}$.

Corolário 0.13. Liapunov

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias independentes tais que* $E[X_n] = \mu_n$ *e* $Var(X_n) = \sigma_n^2 < \infty$*, com pelo menos um* $\sigma_n^2 > 0$. *Seja* $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$. *Se existir* $\delta > 0$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}E[|X_k - \mu_k|^{2+\delta} = 0,$$

então

$$\frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{Var(S_n)}} \to^D N(0,1).$$

Exemplo 0.14. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, $X_n \sim U(-n,n)$.Verifiquemos a condição de Liapunov:

Verifica-se facilmente que $E[X_k] = 0$ e $Var(X_k) = \frac{k^2}{3}$ para todo k. Assim $s_n^2 = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3}$ é tal que

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3} = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

temos que para n grande, $\frac{s_n^2}{n^3} = \frac{s_n^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{9}$. s_n é da ordem de $n^{\frac{3}{2}}$ e s_n^3 é da ordem de $n^{\frac{9}{2}}$.

$$E[|X_k - \mu_k|^{2+1} = E[|X_k|^3] = \frac{1}{2k}\int_{-k}^{k}|x|^3dx = \frac{1}{k}\int_0^k |x|^3dx = \frac{k^3}{4}.$$

e

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{4} = \frac{1}{16}.$$

isto é, $\sum_{k=1}^n E[|X_k|^3]$ é da ordem de n^4.Portanto

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}E[|X_k|^3] =$$

$$lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{9}{2}}}{s_n^3}\frac{\sum_{k=1}^n E[|X_k|^3]}{n^4}\frac{n^4}{n^{\frac{9}{2}}} = \frac{27}{16}.lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil