Resolução do Exercício 2 item 3.

Enunciado: T(n) = 3T(n/2) + n para n > 1 é ??? com T(1) = 1. Dica: resolva a recorrência para n=2^k.

T(n)=**3*T(n/2)+n**=3*[3*T(n/2^2)+n/2]+n=**3^2*T(n/2^2)+3*n/2 + n**=
=3^2*[3*T(n/2^3)+n/2^2]+3*n/2 + n= **3^3*T(n/2^3)+3^2*n/2^2 +3*n/2 + n**=
=….= **3^k*T(n/2^k)+3^(k-1)*n/2^(k-1) +….+ n =3^k*T(n/2^k)+SUM(0...k-1) n*(3/2)^(i)**

Teremos T(1) = T(n/2^k) no último nível, logo:
n/2^k = 1
n=2^k
k = lgn (log na base 2)

T(n) = 3^**k***T(n/2^**k**)+SUM(0...**k**-1) n*(3/2)^(i) **=**
= 3^**lgn***T(1) + SUM(0...**lgn**-1) n*(3/2)^(i) =
= 3^lgn + SUM(0...**lgn**-1) n*(3/2)^(i) = , pois T(1)=1
= n^lg3 + SUM(0...**lgn**-1) n*(3/2)^(i) = , pois 3^lgn = n^lg3 (propriedade de logaritmo)

Vamos analisar o somatório, como se trata de uma PG com razão (3/2) > 1, não dá pra aplicar PG infinita. Vamos calcular a PG finita: a1(q^m-1)/(q-1)

onde, para SUM(0...**lgn**-1) n*(3/2)^(i) , temos
a1 = 1, q = (3/2) e m = lgn (quantidade de termos da PG já que começamos em 0).

Logo,

SUM(0...**lgn**-1) n*(3/2)^(i) = 1.((3/2)^lgn-1)/(3/2-1) =
= ((3/2)^lgn – 1)*2 =
=(n^lg(3/2)-1)*2 =
=(n^(lg3 -lg2)-1)*2 =
= (n^(lg3-1)-1)*2 =
= (2*n^(lg3-1)-2

T(n) = n^lg3 + 2*n^(lg3-1) – 2 = O(n^lg3)

Provando por indução:

T(k)<=cn^lg3 - dn para todo k <n (Para T(k)<=cn^lg3 não funciona!!)

Para k=n, teremos:

T(n)= 3T(n/2) + n <= 3cn^lg3 – 3dn + n
<= 3cn^lg3 – (3d-1)n
<= Cn^lg3
onde C >= 3c e (3d-1)>0, ou seja, d>1/3