TEORIA

1) Em termos gerais, um sinal discreto é contínuo em amplitude mas discreto no tempo. Isto é, sua amplitude pode assumir qualquer valor, mas é definida ou medida apenas em intervalos de tempo uniformes. Portanto, o termo discreto aplica-se para o tempo e não para amplitude.

Um sinal discreto é, muitas vezes, confundido com o termo "sinal digital". Na verdade, o sinal digital é um tipo especial de sinal discreto. Como qualquer sinal discreto, ele é definido em intervalos de tempo específicos. Mas, sua amplitude é restrita a valores específicos também. Temos sinais digitais binários, onde a amplitude é limitada a dois valores $\{-1, 1\}$ ou $\{0, 1\}$. Um sinal de nível M pode assumir somente 2^M amplitudes pré definidas. Portanto, um sinal digital é um sinal discreto com valores restritos de amplitude.

2) Como deduzido em sala (dedução será apresentada no ex.), a discretização do sinal no tempo leva à replicação do espectro de frequência. Essa replicação se dá a uma frequência f_s (exatamente a frequência de amostragem).

3) Não existe relação entre a frequência fundamental f_0, que é uma característica do sinal e a frequência f_s, selecionada para criar o sinal discreto.

Para definir f_s, utiliza-se a frequência máxima do sinal, f_{max}. De acordo com Nyquist,

$$f_s > 2 f_{max}$$

4) Diz o teorema da amostragem:

Se um sinal analógico $x(t)$ tem banda limitada, ou seja, se a frequência mais elevada do sinal é B:

$$X(\omega) = 0 \quad \text{para} \quad |f| > B$$

então, é suficiente uma amostragem a qualquer taxa

$$f_s > 2B$$

Quando o teorema da amostragem é respeitado, o sinal pode ser reproduzido sem erro de aliasing.

5) Superamostragem → $f_s > 2B$

amostragem de Nyquist → $f_s = 2B$

Subamostragem → $f_s < 2B$

6) Quando há subamostragem do sinal, pode haver o efeito de aliasing. Nesse caso, a DTFT deixa de ter uma correspondência biunívoca com o sinal contínuo original.

O aliasing distorce o espectro do sinal original. Há uma superposição entre o espectro original e suas réplicas de modo que o fenômeno de um componente de alta frequência pode ocorrer em frequências baixas.

De acordo com o teorema da amostragem, a taxa de amostragem deve ser pelo menos o dobro da componente de máxima frequência do sinal de interesse. Mas, como você garante isso na prática? Mesmo qdo. você tem certeza que o sinal adquirido tem um limite superior na frequência (o que já é difícil), os sinais parasitas podem conter frequências mais altas que a frequência de Nyquist.

Para ter certeza de que o conteúdo da frequência do sinal de entrada é limitado, um filtro passa baixa é adicionado antes da amostragem e do conversor AD.

Este é chamado filtro anti-Alias por atenuar as altas frequências e evitar os erros causados por aliasing.

7) As frequências, em Hertz, dos sinais são:

$$-7 \xrightarrow{+4} -3 \xrightarrow{+4} 1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+4} 9 \quad (Hz)$$

Elas, portanto, diferem por um múltiplo de 4 Hz. Seus sinais amostrados serão todos idênticos porque cada uma dessas frequências tem a mesma réplica periódica de 4

Define-se a frequência $f_m = 1+4m \quad (m=-2,-1,0,1,2)$

Portanto,

$$x_m(t) = sen(2\pi f_m t) = sen(2\pi(1+4m)t)$$

Substituindo-se $t = nT_s = \frac{n}{f_s} = \frac{n}{4}$,

$$x_m(t) = sen\left(2\pi \frac{n}{4} + 8\pi m \frac{n}{4}\right)$$

$$x_m(t) = sen\, 2\pi \frac{n}{4} \overset{1}{\cancel{\cos 2\pi mn}} + \cos 2\pi \frac{n}{4} \overset{0}{\cancel{sen\, 2\pi mn}}$$

$$\boxed{x_m(t) = sen\left(2\pi \frac{n}{4}\right)}$$

portanto, o valor amostrado independe de $\underline{\underline{m}}$.

8) $x(t) = 4 + 3\cos \pi t + 2\cos 2\pi t + \cos 3\pi t$

As frequências dos 4 termos são,

$$\underbrace{0}_{f_0} ; \underbrace{0{,}5}_{f_1} ; \underbrace{1}_{f_2} ; \underbrace{1{,}5}_{f_3} \quad (KHz)$$

tempo está em ms

A frequência máx é $f_{max} = 1{,}5\,KHz$. Portanto, a frequência de Nyquist é,

$$f_N = 3\,KHz.$$

Supondo-se, como pede o enunciado, que a amostragem seja a uma frequência,

$$f_s = \frac{1}{2} f_N = 1{,}5\,KHz.$$

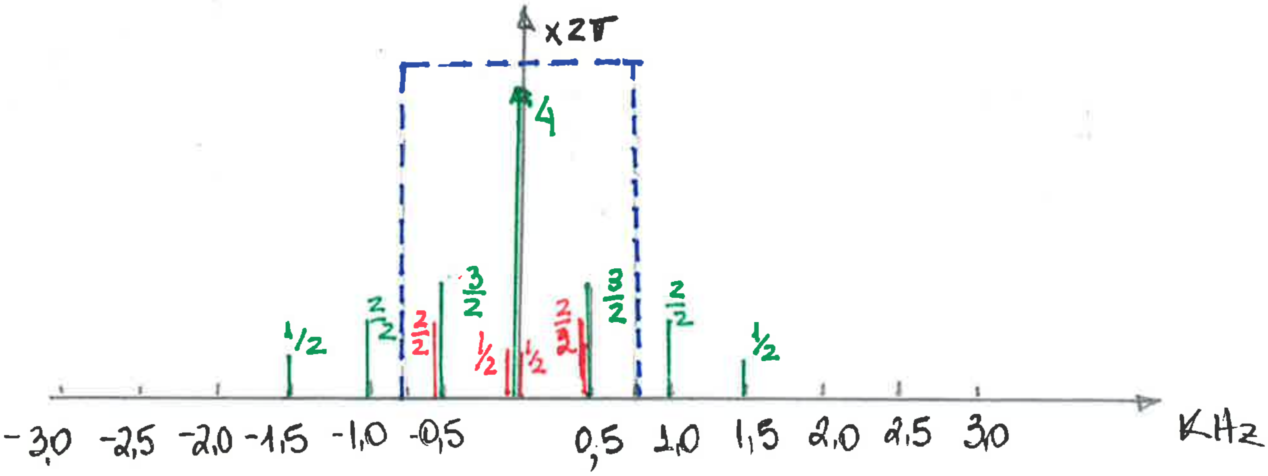
O intervalo de Nyquist é $[-0{,}75 ; 0{,}75]$ KHz.

As frequências f_0 e f_1 estão no intervalo, e, ∴, não ocorrerá aliasing.

Mas f_2 e f_3 estão no intervalo, e, ∴, ocorrerá aliasing.

Lembre-se que:

$$x(t) = \cos(2\pi\, \omega_0 t) \Longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{2}\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$$



$$x(t) = 4 + 1 + \frac{5}{2} e^{2\pi j 0{,}5 t} + \frac{5}{2} e^{-2\pi j 0{,}5 t}$$

$$= 5 + \frac{5}{2}\left(e^{2\pi j 0{,}5t} + e^{-2\pi j 0{,}5 t}\right)$$

$$\boxed{x(t) = 5 + 5\cos \pi t}$$

9) Pela transformada de Fourier,

$$\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{K=-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-KT)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(t-KT)\,e^{-j\omega t}\,dt \qquad t \to KT$$

$$= \sum_{K=-\infty}^{\infty} x(KT)\,e^{-j\omega n T} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-KT)\,dt}_{=1}$$

$$\therefore \boxed{\bar{X}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-jn\Omega}},$$ onde $\Omega = \omega T$ é a frequência digital

$x[n]$: valores discretos de x, tomados com periodicidade n

$$\boxed{x(KT) = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\,e^{jn\Omega}}$$

↳ a integral não é mais de $-\infty$ a $+\infty$ porque a discretização de x gerou periodicidade no espectro.

$$x(t) = x(t+T)$$
$$x[n] = x[n+N]$$

As equações acima representam um sinal periódico contínuo e discreto, respectivamente. O menor valor de N que satisfaz essa condição é chamado período fundamental do sinal discreto.

Considerando um sinal periódico,

$$\cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 (n+N))$$

$$\therefore \cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n)\cos(\Omega_0 N) - \operatorname{sen}(\Omega_0 n)\operatorname{sen}(\Omega_0 N)$$

$$\therefore \cos(\Omega_0 N) = 1$$
$$\operatorname{sen}(\Omega_0 N) = \emptyset$$

$$\Omega_0 N = 2\pi K$$
$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{K}{N}$$

$\therefore$ O sinal discreto só será periódico se a frequência digital for um múltiplo racional de 2π,

$$\boxed{N_0 = \frac{2\pi K}{\Omega_0}}$$

O menor inteiro K, que resulta em um inteiro N dá o período fundamental N_0 (se existir)

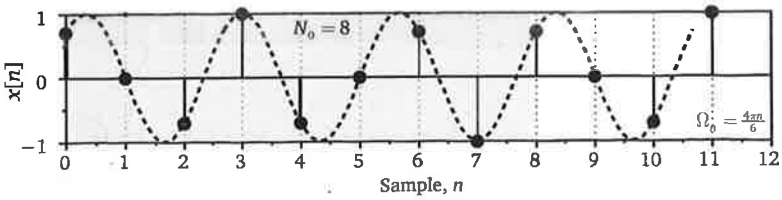
Ⓞ sinal

$$x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} n + \frac{\pi}{4}\right)$$

possui período fundamental,

$$N_0 = \frac{2\pi K}{\Omega_0} = \frac{2\pi}{3\pi/4} = \frac{8\cancel{\pi}}{3\cancel{\pi}} K(=3) = 8 \text{ amostras.}$$

O período é de 8 amostras, mas leva 6π rad para repetir a amostra. O sinal cobre 3 ciclos em 8 amostras. Mas, desde que exista um número inteiro de amostras para em qualquer inteiro múltiplo de 2π, o sinal é periódico.



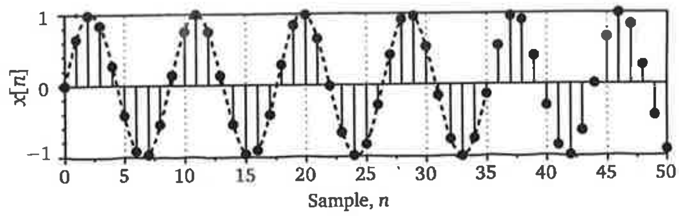
O sinal

$$x[n] = \text{sen}\left(\frac{1}{2}n + \pi\right)$$

não possui período fundamental, pois

$$N = \frac{2\pi K}{1/2} = 4\pi K$$

Como K deve ser inteiro, o número sempre será irracional e as amostras jamais se repetirão, apesar do sinal ser contínuo.



11

$x(t) = 3 \cos 100\pi t$

a) $\omega = 100\pi$

$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$

A frequência de Nyquist necessária para evitar aliasing é $f_N = 2 \times f = 100 \text{ Hz}$.

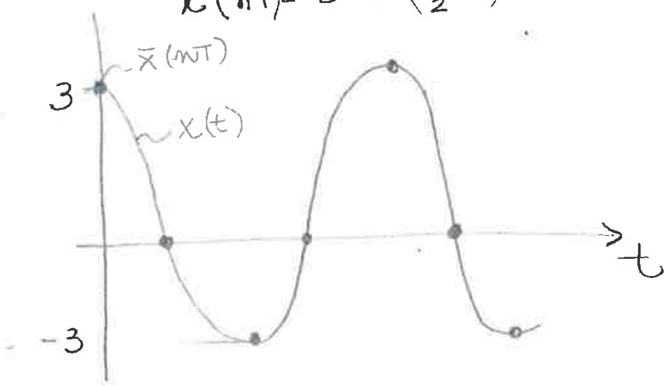
b) $f_S = 200 \text{ Hz}$

$\bar{x}(nT) = 3 \cos 100\pi \cdot nT$

$T = \frac{1}{f_S} = \frac{1}{200}$

$\therefore \bar{x}(nT) = 3 \cos \frac{\cancel{100}}{\cancel{200}} \pi n$

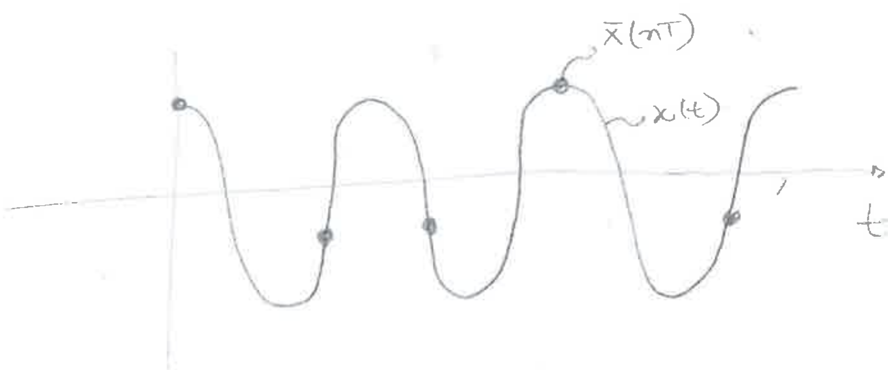
$\bar{x}(nT) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$



c) $f_S = 75 \text{ Hz}$

$\bar{x}(nT) = 3 \cos 100\pi nT$

$\bar{x}(nT) = 3 \cos \frac{100\pi}{75} n = 3 \cos\left(\frac{4\pi}{3} n\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3} n\right)$



d) A amostragem a 75Hz gera aliasing. Para essa taxa, pergunta-se, $f = 50\,Hz$ é um "alias" de qual frequência?

Temos, no item c, $\bar{x}(nT) = 3\cos\frac{2\pi}{3}n$

$$\therefore\ f = \frac{2\pi}{3 \times 2\pi} = \frac{1}{3}$$

A frequência do sinal amostrado é $\frac{1}{3}$.

Do exercício anterior sabe-se que, a frequência deve seguir:

$$\frac{f_0}{f_s} = \frac{1}{3} \Rightarrow f_0 = \frac{75}{3} = 25\,Hz$$

$\therefore\ y(t) = 3\cos 2\pi \times 25t = 3\cos 50\pi t$ amostrado a $f_s = 75\,Hz$ gera um sinal

$$\bar{y}(nT) = \bar{x}(nT)$$

12) $x(t) = \underbrace{3\cos 50\pi t}_{1} + \underbrace{10 \operatorname{sen} 300\pi t}_{2} - \underbrace{\cos 100\pi}_{3}$

f_N: já sabemos que está relacionada com a maior frequência entre os sinais que formam $x(t)$

$B_1 = 25\,Hz \quad B_2 = 150\,Hz \quad B_3 = 50\,Hz$

$\therefore \; B = 150\,Hz$

$f_N = 2B = 300\,Hz$

b) $y(t) = 10 \operatorname{sen} 300\pi t$

$y(nT) = 10 \operatorname{sen} \dfrac{300\pi n}{300} = 10 \operatorname{sen} n\pi = \phi, \; \forall n$

Este é um caso especial para ressaltar a vocês um detalhe do teorema da amostragem. Para nos certificarmos da reconstrução exata de qualquer sinal com base em suas amostras, a taxa de amostragem deve ser maior do que a taxa de Nyquist em lugar de pelo menos a taxa de Nyquist. Nos exemplos em que a potência do sinal exatamente na frequência de Nyquist é zero, esse detalhe não tem importância.

No caso de nosso exemplo, amostramos o sinal exatamente quando ele passa pelo zero, e, portanto, ele foi completamente desconsiderado na composição amostral de $\bar{x}(nT)$

c)

Qualquer senóide a certa frequência pode ser representada como a soma de um cosseno e um seno:

$$A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = \underbrace{A \cos\theta}_{A_C} \cos 2\pi f_0 t - \underbrace{A \operatorname{sen}\theta}_{A_S} \operatorname{sen} 2\pi f_0 t$$

$$A \cos(2\pi f_0 t + \theta) = A_C \cos 2\pi f_0 t + A_S \operatorname{sen} 2\pi f_0 t$$

Portanto, quando a senóide é amostrada exatamente à sua taxa de Nyquist, a parte do seno é descartada, restando somente $A_C \cos 2\pi f_0 t$.

Veja que não há ambiguidade na frequência f_0, mas sim na amplitude $A \neq A_C$ e fase.

12

Sabe-se que $f_N = 2B$, onde B é a frequência máxima do espectro do sinal.

a) $x(t) = 1 + \cos 2000\pi t + \operatorname{sen} 4000\pi t$

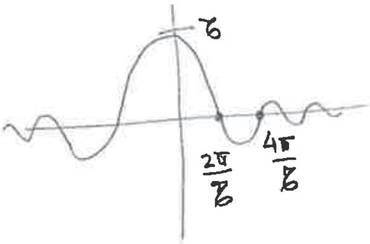
$$B = \frac{4000\pi}{2\pi} = 2000$$

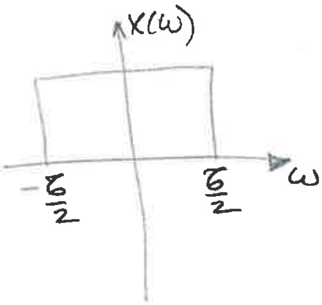
$$\therefore f_N = 4000 \text{ Hz}$$

b) $x(t) = \operatorname{sinc}(50\pi t)$

$\operatorname{sinc}(50\pi t) \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{100\pi} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$

$\operatorname{sinc}(50\pi t) \Longleftrightarrow 0{,}02 \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$





$$\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Longleftrightarrow 2\pi \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

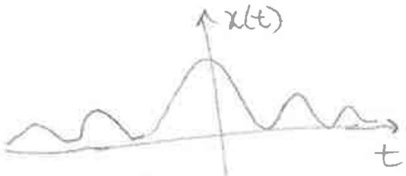
$\frac{\tau}{2} = 50\pi \Rightarrow \tau = 100\pi$ $\therefore$ espectro varia entre $\pm 50\pi$

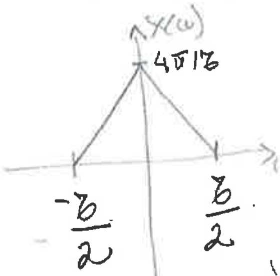
$\therefore B = \frac{50\pi}{2\pi} = 25 \text{ Hz}$,

o que leva a $f_N = 2 \times 25 \text{ Hz} = 50 \text{ Hz}$

c) $x(t) = \operatorname{sinc}^2(100\pi t)$

$\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\tau t}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} \Delta\left(\frac{\omega}{2\tau}\right)$





$\frac{\tau}{2} = 100\pi \Rightarrow \tau = 200\pi$

$\operatorname{sinc}^2(100\pi t) \Longleftrightarrow 0{,}01 \Delta\left(\frac{\omega}{400\pi}\right)$

$\therefore B = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$

o que leva a uma $f_N = 2 \times 100 \text{ Hz} = 200 \text{ Hz}$

d) $x(t) = \text{sinc}(100\pi t) + 3\,\text{sinc}^2(60\pi t)$

$\hookrightarrow \frac{\tau}{2} = 60\pi \Rightarrow \tau = 120\pi$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\pi}{200\pi}\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right) + \frac{3\times 2\pi}{120\pi}\,\Delta\left(\frac{\omega}{240\pi}\right) =$$

$$= \underbrace{0{,}01\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)}_{\text{varia entre } \pm\frac{\tau}{2} = \pm 50\,Hz} + \underbrace{\frac{1}{20}\,\Delta\left(\frac{\omega}{240\pi}\right)}_{\text{varia entre } \pm\frac{\tau}{2} = \pm 60\,Hz}$$

A largura de banda da soma é o maior dos valores, i.é, $B = 60\,Hz$. Portanto, $f_N = 2\times 60 = 120\,Hz$

e) $x(t) = \text{sinc}(50\pi t)\,\text{sinc}(100\pi t)$

$$\text{sinc}(50\pi t) \Longleftrightarrow 0{,}02\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{100\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(100\pi t) \Longleftrightarrow 0{,}01\,\text{rect}\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$$

Os dois sinais que compõem $x(t)$ têm largura de banda de 25 Hz e 50 Hz, respectivamente. Existe uma propriedade da convolução importante para resolver este problema: a largura do sinal resultante da convolução é a soma das larguras de cada sinal.

$$\therefore\ B = 25 + 50 = 75\,Hz$$

Portanto, $f_N = 2\times 75 = 150\,Hz$

14)

$$x_1(t) = \cos 20\pi t$$

$$x_2(t) = \cos 100\pi t$$

$$f_s = 40Hz \implies T = \frac{1}{40}$$

a) $$\therefore x_1(nT) = \cos(20\pi nT) = \cos \frac{20\pi}{40} n$$

$$x_1(nT) = \cos \frac{\pi}{2} n$$

$$x_2(nT) = \cos(100\pi nT) = \cos \frac{100\pi}{40} n$$

$$x_2(nT) = \cos \frac{5\pi}{2} n = \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$

$\therefore$ Os sinais amostrados x_1 e x_2 são idênticos e, $\therefore$, não se pode distinguir. Se, portanto, o sinal é amostrado a $\cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$ não se pode dizer se o sinal corresponde a x_1 ou x_2.

Como x_2 resulta nos mesmos valores de x_1 para uma amostragem de 40Hz, diz-se que a frequência $f = 50Hz$ é uma "aliás" da frequência $f = 10$ Hz à uma taxa de amostragem de 40Hz.

b) Aprendemos em sala que sinais amostrados são idênticos quando cada uma de suas frequências tem a mesma réplica periódica em múltiplos de f_s:

$$f_i = f_0 + f_s i$$

$$x_i(t) = \cos(2\pi f_i t)$$

$$t = nT = \frac{n}{f_s}$$

$$\therefore \; x_i(nT) = \cos\left[2\pi(f_0 + f_s i)\frac{n}{f_s}\right]$$

$$x_i(nT) = \cos\left[2\pi \frac{f_0}{f_s} n + 2\pi i n\right]$$

$$x_i(nT) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) \underbrace{\cancel{\cos(2\pi i n)}}_{1} + \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right) \cancelto{0}{\operatorname{sen}(2\pi i n)}$$

$$\boxed{x_i(nT) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} n\right)}$$

independente de i #

$\therefore$, para $f_s = 40\,Hz$, as frequências:

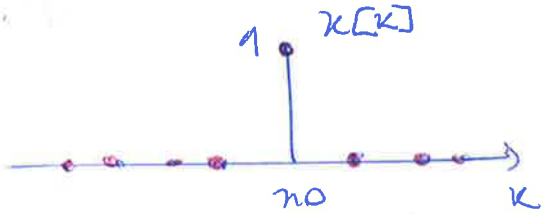
$f_i = 10 + 40i$ são todas "aliás" de $f_s = 10\,Hz$.

OBS $\rightarrow$ $\frac{f_0}{f_s} \times 2\pi \Rightarrow$ frequência digital

$2\pi f_0 \Rightarrow$ frequência analógica

15)

a) $x[k] = \delta[k-n_0]$



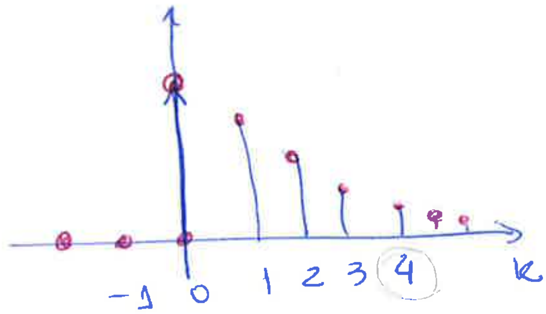
$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k-n_0] e^{-jk\Omega} = e^{-j\Omega n_0}$$

$$\boxed{\delta[k-n_0] \Longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0}}$$

Par DTFT

b) $x[k] = \alpha^k u[k]$. $|\alpha| < 1$

(FILTRO)



$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-jk\Omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u[k] e^{-j\Omega k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^k$$

Sabe-se que (fórmula para soma geométrica) $\boxed{\sum_{k=M}^{N} \beta^k = \frac{\beta^{N+1} - \beta^M}{\beta - 1}}$ $\therefore$ $X(\Omega) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}$

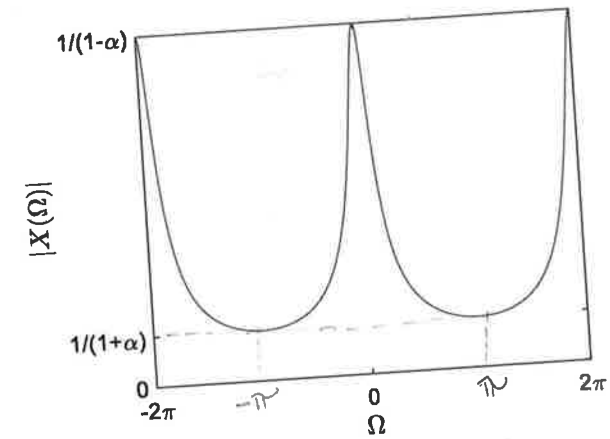
Vamos analisar amplitude para se ter uma ideia do comportamento do filtro.

Amplitude $|X(\Omega)|$

Fase $\angle X(\omega)$

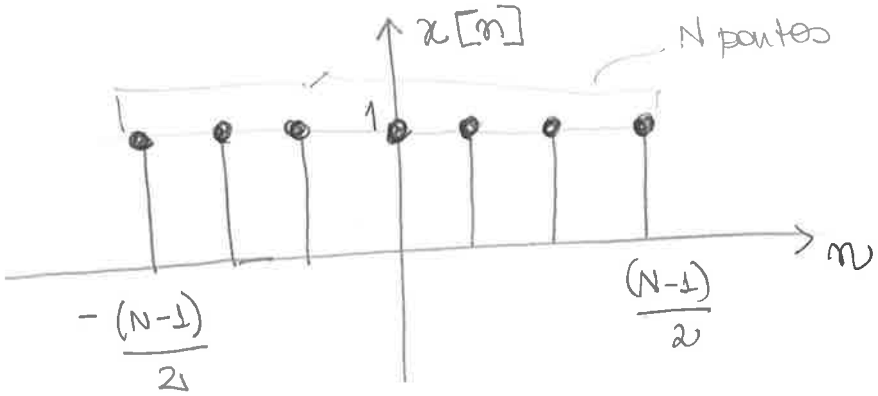
$$|X(\Omega)| = \left|\frac{1}{1-\alpha e^{-j\Omega}}\right| = \frac{1}{\left|\underbrace{(1-\alpha\cos\Omega)}_{\text{parte real}} + j\underbrace{\alpha \,\text{sen}\,\Omega}_{\text{parte imaginária}}\right|}$$

$$\therefore |X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha\cos\Omega)^2 + (\alpha\,\text{sen}\,\Omega)^2}}$$



∴ é um filtro passa baixa

c) Pulso no domínio do tempo



$$x[n] = \begin{cases} 1 & -\frac{(N-1)}{2} < n \leq \frac{(N-1)}{2} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-M}^{M} e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega M} \sum_{n=0}^{2M} e^{-j\Omega n}$$

onde $M = \frac{N-1}{2}$

Aplicando soma finita,

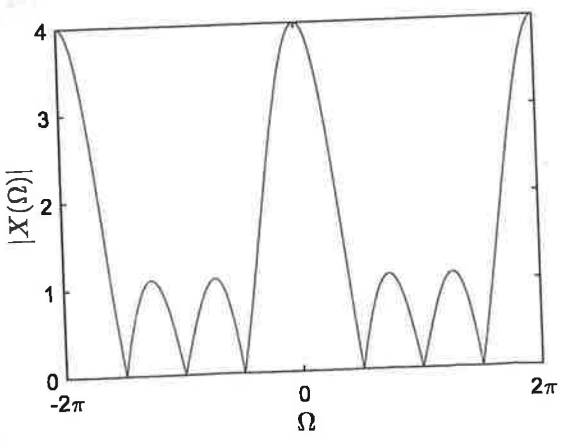
$$X(\Omega) = e^{j\Omega M}\left[\frac{1-e^{-j\Omega(2M+1)}}{1-e^{-j\Omega}}\right]$$

$$X(\Omega) = e^{j\Omega M}\,\underbrace{\frac{e^{-j\Omega\frac{(2M+1)}{2}}}{e^{-j\Omega/2}}}_{=1}\left[\frac{e^{j\Omega\frac{(2M+1)}{2}} - e^{-j\Omega\frac{(2M+1)}{2}}}{e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}}\right]$$

$$X(\Omega) = \frac{\operatorname{sen}\left[(2M+1)\,\Omega/2\right]}{\operatorname{sen}\left[\Omega/2\right]}$$

$$2M+1 = 2\left(\frac{N-1}{2}\right)+1 = N-1+1 = N$$

$$\therefore\ \boxed{X(\Omega) = \frac{\operatorname{sen}\left[N\,\Omega/2\right]}{\operatorname{sen}\left[\Omega/2\right]}}$$



16

a) $x(t) = 2\, e^{j\pi/2}\, e^{-j2\pi(40)t} + 4 e^{j\pi/3}\, e^{-j2\pi 12 t} +$

$+ 2 e^{-j\pi/2}\, e^{j2\pi 40 t} + 4 e^{-j\pi/3}\, e^{j2\pi 12 t}$

$$\boxed{x(t) = 4\cos\left(2\pi(40)t - \pi/2\right) + 8\cos\left(2\pi(12)t - \pi/3\right)}$$

b) Sim, o sinal é periódico.

$4\cos(2\pi 40 t - \pi/2) \longrightarrow$ período $\frac{1}{40}$ s

$8\cos(2\pi\, 12 t - \pi/3) \longrightarrow$ período $\frac{1}{12}$ s

Para achar o período, o truque é encontrar l_1 e l_2, tais que,

$$l_1\left(\frac{1}{40}\right) = l_2\left(\frac{1}{12}\right)$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} \implies \begin{matrix} l_1 = 10 \\ l_2 = 3 \end{matrix}$$

∴, o período comum é $\frac{10}{40}$ (ou, obviamente, $\frac{3}{12}$)), que é $1/4$ s.

c) O teorema de Nyquist requer que,

$$f_s > 2 f_{max} = 2 \times (40 Hz) = 80 Hz$$

17) O espectro do sinal $\bar{x}(nT) = x(t)\,\delta_T(t)$ foi deduzido em sala e está repetido abaixo

$\delta_T(t)$ é um sinal periódico e, portanto, pode ser escrito como:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\left[1 + 2\left(\cos\omega_s t + \cos 2\omega_s t + \cos 3\omega_s t + \ldots\right)\right]$$

$$\omega_s = \frac{1}{T}$$

Dessa forma,

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T}\left[x(t) + 2x(t)\cos\omega_s t + 2x(t)\cos 2\omega_s t + \ldots\right]$$

$$x(t)\cos\omega_s t = \frac{1}{2}\left[x(t)\,e^{j\omega_s t} + x(t)\,e^{-j\omega_s t}\right]$$

$$x(t)\,e^{-j\omega_s} \iff X(\omega+\omega_s)$$

$$x(t)\,e^{j\omega} \iff X(\omega-\omega_s)$$

$$\therefore\ x(t)\cos\omega_s t = \frac{1}{2}\left[X(\omega+\omega_s) + X(\omega-\omega_s)\right]$$

$$\therefore\ \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T}\left[X(\omega) + X(\omega+\omega_s) + X(\omega-\omega_s) + X(\omega+2\omega_s) + X(\omega-2\omega_s) + \ldots\right.$$

$$\boxed{\therefore\ \bar{X}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)}$$

Particularmente para este exercício, $T = \frac{1}{3}$ e, $\therefore$, $\omega_s = \frac{2\pi}{1/3}$

$$\boxed{\bar{X}(\omega) = 3\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 6\pi k)}$$

como $x(t) = \cos \omega_0 t$

$$X(\omega) = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$X(\omega - 6\pi K) = \pi \delta(\omega - 6\pi K - \omega_0) + \pi \delta(\omega - 6\pi K + \omega_0)$$

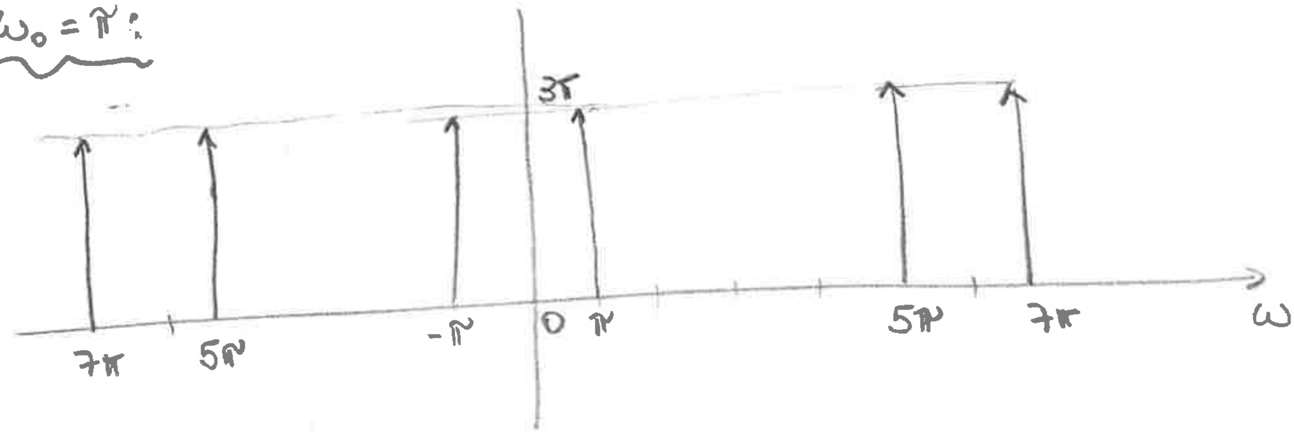
$$X(\omega + 6\pi K) = \pi \delta(\omega + 6\pi K - \omega_0) + \pi \delta(\omega + 6\pi K + \omega_0)$$

Supondo $-1 \leq K \leq 1$,

$$\bar{X}(\omega) = 3\left[X(\omega + 6\pi) + X(\omega) + X(\omega - 6\pi)\right]$$

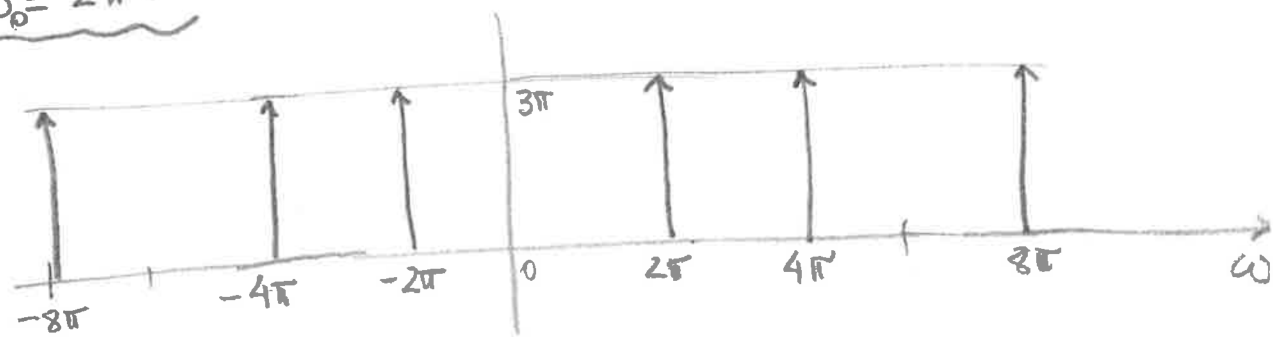
$$= 3\pi\left[\delta(\omega + 6\pi - \omega_0) + \delta(\omega + 6\pi + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - 6\pi - \omega_0) + \delta(\omega - 6\pi + \omega_0)\right]$$

$\omega_0 = \pi$:



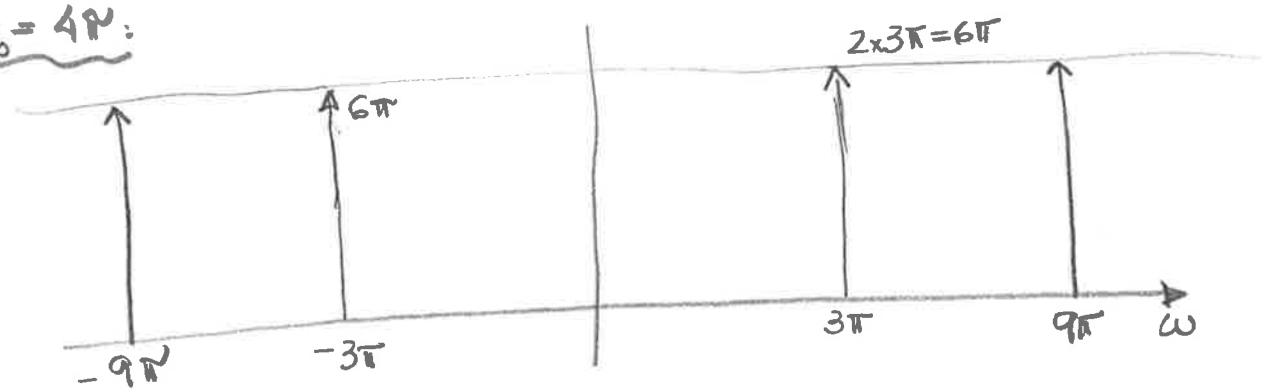
$$\bar{X}(\omega) = 3\pi\left[\delta(\omega + 5\pi) + \delta(\omega + 7\pi) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega + \pi) + \delta(\omega - 7\pi) + \delta(\omega - 5\pi)\right]$$

$\omega_0 = 2\pi$:



$$\bar{X}(\omega) = 3\pi\left[\delta(\omega + 4\pi) + \delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi) + \delta(\omega - 8\pi) + \delta(\omega - 4\pi)\right]$$

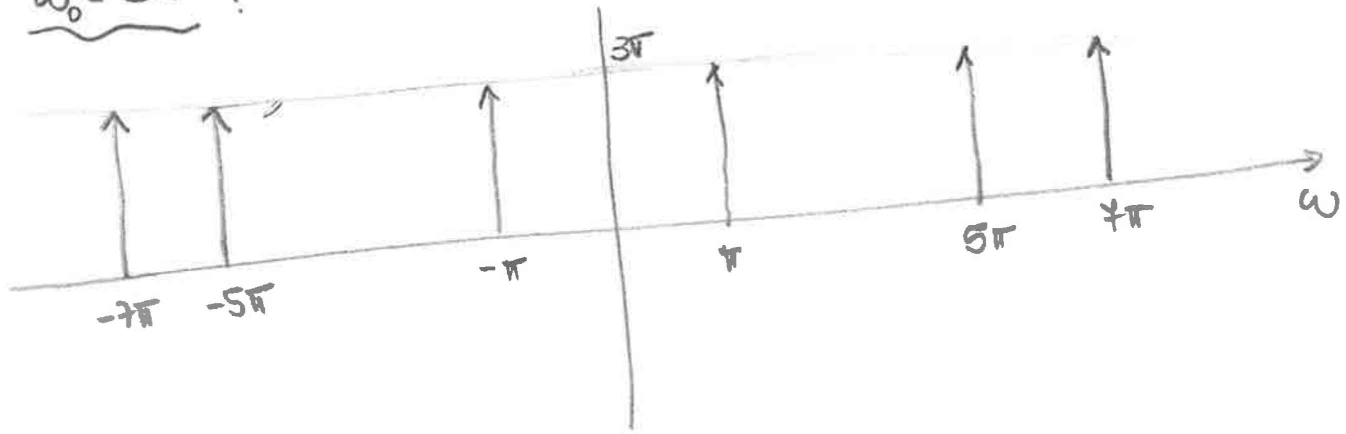
$\omega_0 = 4\pi$:



$$\bar{X}(\omega) = 3\pi\Big[\delta(\omega+3\pi) + \delta(\omega+9\pi) + \delta(\omega-3\pi) + \delta(\omega+3\pi) + \delta(\omega-9\pi) + \delta(\omega-3\pi) + \dots\Big]$$

OBS → Repare que, pela nossa equação truncada, a amplitude em 9π seria de 3π, porém se adicionarmos mais um termo $K = 2$, percebe-se que o termo $\delta(\omega - 9\pi)$ é somado a $\bar{X}(\omega)$.

$\omega_0 = 5\pi$:



$$\bar{X}(\omega) = 3\pi\Big[\delta(\omega+\pi) + \delta(\omega+11\pi) + \delta(\omega-5\pi) + \delta(\omega+5\pi) + \delta(\omega-11\pi) + \delta(\omega-\pi) + \dots\Big]$$

OBS → Novamente, mais termos do somatório devem ser acrescentados para a equação coincidir com o gráfico.

b) Do item (a), os sinais amostrados para $\omega_0 = \pi$ e $\omega_0 = 5\pi$ são idênticos.

18 a) $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \int X(f) e^{-jft} df$ $\quad \omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df$ 25

$$x(t) = 2 e^{j\pi/3} e^{-j30t} + 4 e^{-j10t} + 4 e^{j10t} + 5 + 2 e^{-j\frac{\pi}{3}} e^{j30t}$$

$$x(t) = 2 e^{j\pi/3} \left[e^{-j2\pi(30)t} + e^{j2\pi(30)t} \right] + 4 \left[e^{-j2\pi(10)t} + e^{j2\pi(10)t} \right]$$

Juntando os termos em comum para formar cosseno

$$x(t) = 2\times 2 \left[\frac{e^{j(2\pi 30t - \pi/3)} + e^{-j(2\pi 30t - \pi/3)}}{2} \right] + 4\times 2 \left[\frac{e^{-j2\pi 10t} + e^{j2\pi 10t}}{2} \right] + 5$$

$$\boxed{x(t) = 4\cos(60\pi t - \pi/3) + 8\cos(20\pi t) + 5}$$

b) $\cos 60\pi t \Longrightarrow$ período $T = \frac{2\pi}{60\pi} = \frac{1}{30}$ s

$\cos 20\pi t \Longrightarrow$ período $T = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10}$ s

Se for difícil entender, faça as curvas no MatLab

Devido à soma dos sinais, o período fundamental será um valor de amostra comum entre ambos. ($1/30$ subdivide $1/10$) o período é $1/10$ s e a frequência fundamental é 10 Hz.

Se o sinal fosse $\cos^2(60\pi t) \Rightarrow$ período $T = \frac{\pi}{60\pi} = \frac{1}{60}$ s $\therefore$ frequência fundamental de 60 Hz.

c) $F_s = \frac{1}{T_s} = 50\,Hz$

$$x[n] = x(nT_s) = x(n/f_s)$$

$$= 4\cos(60\pi n/50 - \pi/3) + 8\cos(20\pi n/50) + 5$$

$$= 4\cos\left(\frac{6\pi}{5}n - \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 5$$

$$= 4\cos\left(2\pi n - \frac{4}{5}\pi n - \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 5$$

$$\boxed{x[n] = 4\cos\left(\frac{4}{5}\pi n + \frac{\pi}{3}\right) + 8\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 5}$$